

ГОССТРОЙ СССР

Центральный научно-исследовательский и проектно-экспериментальный институт
автоматизированных систем в строительстве

ЦНИПИАСС

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ОРГАНИЗАЦИИ
СТРОИТЕЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ
И ПРОИЗВОДСТВА

ТЕОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ
ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ

ВЫПУСК

12

ТРУДЫ

ИНСТИТУТА

Под общей редакцией
д-ра техн. наук А. А. ГУСАКОВА

МОСКВА 1976

ОЦЕНКА АДАПТИВНОСТИ СИСТЕМ СТРОИТЕЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА

Канд. техн. наук Куликов Ю.А.,
Тарасцов О.Г.

В условиях вероятностного характера строительного производства и большой неопределенности будущих состояний, в которых может оказаться система строительного производства под воздействием случайных факторов, весьма важной задачей является оценка адаптивности системы.

Широкий класс систем строительного производства может быть формализованно описан с помощью теории графов. При таком описании оценка адаптивности системы представляет собой число возможных вариантов достижения строительной системой конечной цели (возведение объекта, реализация целевой программы и т.д.), удовлетворяющих заданному графу.

Задачу оценки адаптивности системы можно сформулировать следующим образом.

Задано некоторое конечное множество $M = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$.

На множестве M задано произвольное несимметричное отношение R , которое определяет некоторый орграф G (орграф ограничений G). На множестве M определено отношение R' полного порядка, а именно:

1. $\forall x, y \in M \quad xR'y \text{ или } yR'x,$
2. Если $xR'y$ и $yR'z$, то $xR'z; \quad x, y, z \in M,$
3. $\neg(xR'x); \quad x \in M.$

Требуется найти количество полных упорядочений R' , удовлетворяющих условию $R' \supset R$. В терминах теории графов задача формулируется следующим образом.

Пусть задан некоторый орграф G (рис.1). Требуется найти число $P(G)$ возможных последовательностей $\{(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_N})\}$ из N вершин орграфа, порядок следования которых определяется заданным орграфом ограничений G .

Рассмотрим орграф G в неориентированном смысле. Тогда, как известно*, неориентированный граф G' распадается единственным образом на полную сумму своих связных компонент, т.е.

*О. Оре. Теория графов. Пер. с англ. М., "Наука", 1968, с. 37.

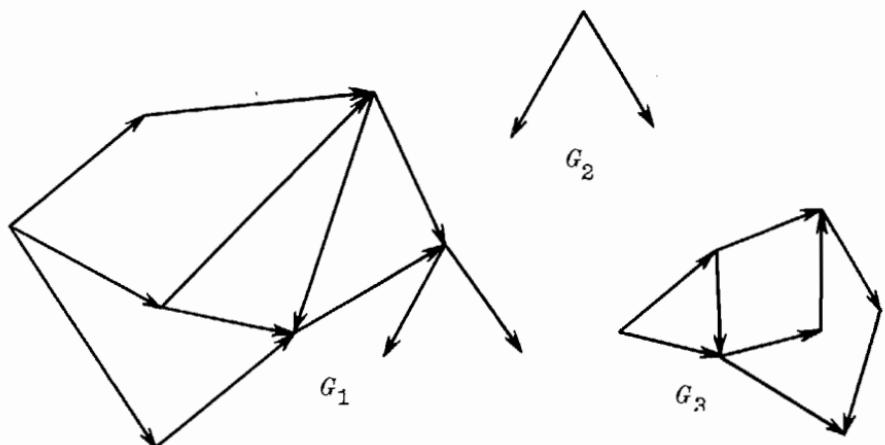


Рис. 1. Орграф ограничений G .

$$G' = \bigcup_{i=1}^m G_i', \quad (1)$$

где G_i' – связные компоненты графа G' .

Рассматривая теперь компоненты G_i' ориентированными с ориентацией, которая индуцируется исходным орграфом G , мы получим разбиение орграфа G на ориентированные подграфы G_i ($i = 1, 2, \dots, m$), связанные в неориентированном смысле (на рис. 1 это подграфы G_1 , G_2 , G_3).

Итак,

$$G = \bigcup_{i=1}^m G_i. \quad (2)$$

Пусть N_i – число вершин орграфа G_i ($i = 1, 2, \dots, m$).

Поскольку ориентированные подграфы G_i между собой никак не связаны, то имеет место следующее соотношение:

$$P(G) = \prod_{i=1}^m P(G_i) C_i \frac{N_i}{\sum N_j}. \quad (3)$$

Таким образом, задача определения числа $P(G)$ последовательностей вершин орграфа G сводится к аналогичным задачам для орграфов G_i , связанных в неориентированном смысле.

Допустим, G – орграф ограниченный, связный в неориентированном смысле (рис. 2).

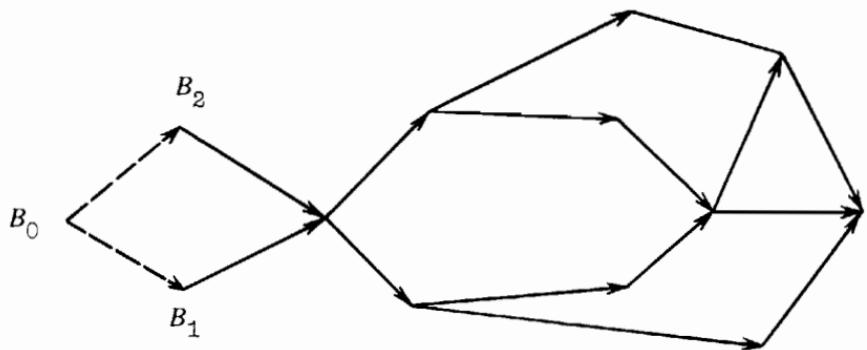


Рис.2. Связный (в неориентированном смысле) орграф ограничений G .

Орграф ограничений G может иметь несколько начальных вершин $B_j (j = 1, 2, \dots, n)$.

Тогда, фиксируя каждую вершину B_j в качестве начальной, получим

$$P(G) = \sum_{j=1}^n P(G \setminus B_j), \quad (4)$$

где $G \setminus B_j$ - орграф ограничений G с фиксированной начальной вершиной B_j .

Таким образом, задача отыскания числа $P(G)$ последовательностей вершин орграфа G , связного в неориентированном смысле и содержащего несколько начальных вершин $B_j (j = 1, 2, \dots, n)$, сводится к аналогичным задачам для орграфов $G \setminus B_j$, связных в неориентированном смысле и содержащих только одну начальную вершину $B_j (j = 1, 2, \dots, n)$.

К аналогичному результату можно прийти путем добавления дополнительной вершины B_o , которая соединена со всеми начальными вершинами B_j орграфа G .

Тогда

$$P(G) = P(GUB_o), \quad (5)$$

где GUB_o - орграф ограничений G с дополнительной начальной вершиной B_o .

Пусть G - орграф ограничений, связный в неориентированном смысле и содержащий только одну начальную вершину.

Будем рассматривать орграфы G , которые не содержат контуров (т.е. ориентированных циклов), так как в противном случае ясно, что $P(G) = 0$.

Для дальнейшего рассмотрения введем определения.

Определение 1. Для любого цикла L вершина, из которой исходят два ребра, называется начальной вершиной цикла L (рис.3).

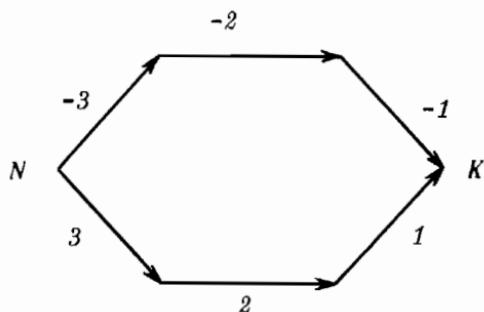


Рис.3. Неориентированный цикл орграфа.

Определение 2. Для любого цикла L вершина, в которую входят два ребра, называется конечной вершиной цикла L (см. рис.3).

При этом очевидно, что у контура нет ни начальной, ни конечной вершин; а любой неориентированный цикл имеет, по крайней мере, одну начальную и одну конечную вершину.

Определение 3. Цикл L орграфа G называется простым, если он содержит ровно одну начальную и одну конечную вершины (см. рис.3).

Определение 4. Орграф, который может содержать только простые циклы, называется простым орграфом.

Рассмотрим только простые орграфы, связные в неориентированном смысле.

Для простого цикла (см.рис.3) вводится следующая нумерация ребер: от конечной вершины до начальной вершины цикла по часовой стрелке нумерация со знаком плюс, против часовой стрелки – со знаком минус. Таким образом, если i -номер ребра простого цикла L , то $-m_1 \leq i \leq m_2$.

Введем следующие обозначения:

G/r – орграф, получающийся из орграфа G , если в последнем выбросить ребро r ;

G/\bar{r} – орграф, получающийся из орграфа G , если в последнем сменить направление ребра r .

Тогда справедливо утверждение $\forall r \in G$, в котором имеет место соотношение

$$P(G) = P(G/r) - P(G/\bar{r}). \quad (6)$$

Данное утверждение справедливо в силу того, что число последовательностей вершин орграфа G/r с ограничениями, задаваемыми этим же орграфом, может быть представлено в виде суммы двух компонент. Причем каждая компонента есть число последовательностей вершин орграфа G/r с ограничениями, задаваемыми орграфами, получающимися, если в орграфе G/r , провести ребра r или \bar{r} (т.е. получаются орграфы G и G/\bar{r}).

Пусть G/\bar{L}_i – орграф, получающийся из орграфа G , если в последнем в простом цикле L сменить на противоположные направления j ребер,

где

$$j = \begin{cases} 1, 2, \dots, i, & \text{если } i > 0 \\ -1, -2, \dots, i, & \text{если } i < 0; \\ -m_1 \leq i \leq m_2; \end{cases}$$

G/L_i – орграф, получающийся из орграфа G/\bar{L}_i или из орграфа G/\bar{L}_i , если в них выбросить $i-1$ ребро.

Тогда справедливо предположение в том, что для любого простого цикла $LC G$ выполнены соотношения:

$$P(G) = \sum_{i=1}^{m_2} (-1)^{i+1} P(G/L_i); \quad (7)$$

$$P(G) = \sum_{i=-m_1}^{-1} (-1)^{i+1} P(G/L_i); \quad (8)$$

$$P(G) = \frac{1}{2} \sum_{i=-m_1}^{m_2} (-1)^{i+1} P(G/L_i). \quad (9)$$

При этом выражение (9) следует из формул (7–8). Докажем справедливость выражения (7) (формула (8) доказывается аналогично). Последовательно применяя лемму I для ребер простого цикла, получим:

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G/L_1) - P(G/\bar{L}_1) = P(G/L_1) - [P(G/L_2) - P(G/\bar{L}_2)] = \\ &= P(G/L_1) - (P(G/L_2) - (P(G/L_3) - \dots - (P(G/L_{m_2}) - P(G/\bar{L}_{m_2}))) \dots) = \\ &= \sum_{i=1}^{m_2} (-1)^{i+1} P(G/L_i) - (-1)^{m_2+1} P(G/\bar{L}_{m_2}), \end{aligned}$$

но, так как орграф G/\bar{L}_{m_2} содержит контур, получившийся в результате смены ориентаций на противоположные ребра цикла L с положительной нумерацией, то $P(G/\bar{L}_{m_2}) = 0$, и, следовательно:

$$P(G) = \sum_{i=1}^{m_2} (-1)^{i+1} P(G/L_i)$$

Проведенные преобразования позволяют свести задачу определения числа последовательностей вершин для орграфа G , содержащего простой цикл $L \subset G$, к аналогичной задаче для подграфов исходного орграфа, не содержащих данный цикл L . Таким образом, можно "избавиться" от любого простого цикла $L \subset G$ при определении числа последовательностей вершин с заданным орграфом ограничений G .

Изложим теперь алгоритм "удаления" циклов, т. е. последовательность сведений задачи нахождения числа последовательностей вершин орграфа G с орграфом ограничений G к аналогичными задачам для подграфов исходного орграфа, не содержащими циклов.

1. Проверка списка циклов. Если он пуст, то переход к пункту 4.

2. Фиксация любого цикла орграфа.

3. "Удаление" цикла. Исправление списка циклов, переход к пункту 1.

4. Конец процедуры.

Рассмотрим орграф G , связный в неориентированном смысле. Для таких орграфов в результате применения процедуры "удаления" циклов образуются орграфы, связные в неориентированном смысле. Доказательство этого факта следует из того, что элементарный акт процедуры "удаления" циклов – это смена ориентации предыдущего ребра и удаление очередного ребра. Смена ориентации ребра не может нарушить связности орграфа в неориентированном смысле, и так как в цикле между двумя вершинами существуют два неориентированных пути: по и против часовой стрелки, и при удалении какого-нибудь ребра один из путей остается.

Алгоритм "удаления" циклов сводит задачу определения числа последовательностей вершин для данного орграфа ограничений, связного в неориентированном смысле, к аналогичным подзадачам, в которых орграфами ограничений являются ордеревья.

Применение алгоритма "удаления" циклов позволяет получить орграфы ограничений, в которых нет циклов, но в силу изложенного выше орграфы должны быть связаны в неориентированном смысле, и они имеют одну корневую вершину, т.е. они являются ордеревьями.

Итак, задача определения числа последовательностей вершин для орграфа ограничений сведена к аналогичной задаче для ордерева ограничений. Рассмотрим последовательность ее решения.

Пусть задано некоторое ордерево D (рис.4), содержащее N вершин. Требуется определить число $P(D)$ последовательностей из N различных вершин ордерева D , причем порядок следования вершин в каждой последовательности определяется заданным ордеревом ограничений D .

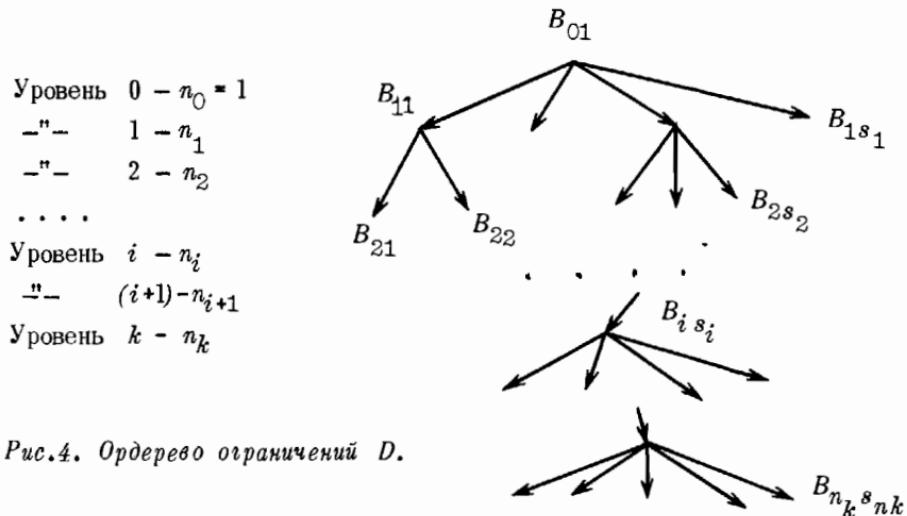


Рис.4. Ордерево ограничений D .

Введем следующие обозначения:

i - уровень вершин ордерева D ; $0 \leq i \leq k$;

n_i - количество вершин i -го уровня ордерева D ;

B_{ij} - j -я вершина i -го уровня ордерева D ;

$0 \leq i \leq k; 1 \leq j \leq n_i$;

D_{ij} - ориентированное поддерево ордерева D с корнем в вершине B_{ij} (j -е поддерево i -го уровня);

m_{ij} - количество вершин i -го уровня, выходящих из вершины $B_{i-1,j}$;

L_{ij} - количество вершин поддерева D_{ij} без учета корневой вершины B_{ij} ;

p_{ijs} - количество вершин s -го уровня поддерева D_{ij} ;

$i \leq s \leq k$, т.е. уровня вершин поддеревьев D_{ij} и исходного ордерева D совпадают;

q_{ijs} - суммарное количество вершин s -го уровня множества поддеревьев вида D_{it} , где $t = 1, 2, \dots, j-1$.

1. Заметим, что вершина B_{01} всегда следует ранее остальных вершин. Выбросим эту вершину B_{01} из рассмотрения, тогда ордерево ограничений D распадается на n_1 между собой не связанных поддеревьев D_{1j} - ветвей первого уровня ($j = 1, 2, \dots, n_1$).

И тогда число возможных последовательностей вершин без учета их перестановки согласно ограничениям внутри каждой ветви D_{1j} будет равно (тем самым мы фиксируем расположение вершин B_{1j}):

$$P_0(D) = C_{L_{01}}^{L_{11}+1} C_{L_{01}-L_{11}-1}^{L_{12}+1} \cdots C_{L_{01}-L_{11}-\cdots-L_{s-1,1}-(s-1)}^{L_{1s}+1} \cdots$$

$$C_{L_{01}-L_{11}-\cdots-L_{1,n-2}}^{L_{1,n-1}+1} \cdots (n-2)$$

или

$$P_0(D) = \prod_{s=1}^{n_1-1} C_{L_{01}-\sum_{r=1}^{s-1}(L_{1r}+i)}^{L_{1s}+1} . \quad (10)$$

2. Вершины 1-го уровня уже фиксированы, отбрасываем их и получаем предыдущий этап, но только для n_1 вершин первого уровня. Гогда число последовательностей вершин без учета перестановки вершин согласно ограничениям внутри каждой ветви второго уровня будет равно

$$P_1(D) = P_0(D) \prod_{j=1}^{n_1} \prod_{s=1}^{m_{2j-1}} C_{L_{1j}-\sum_{r=1}^{s-1}(L_{2,r+q_{1j2}}+1)}^{L_{2,s+q_{1j2}}+1} \quad (11)$$

и т.д., на l -м шаге получим:

$$P_l(D) = P_{l-1}(D) \cdot \prod_{j=1}^{n_l} \prod_{s=1}^{m_{l+1,j}-1} C_{L_{lj}-\sum_{r=1}^{s-1}(L_{l+1,r+q_{lj,l+1}}+1)}^{L_{l+1,s+q_{lj,l+1}}+1} ; \quad (12)$$

на $(k-1)$ -м шаге получим:

$$P(D) = P_{k-1}(D) = P_{k-2}(D) \prod_{j=1}^{n_{k-1}} \prod_{s=1}^{m_{kj}-1} C_{L_{kj}-\sum_{r=1}^{s-1}(L_{k,r+q_{k-1,jk}}+1)}^{L_{k,s+q_{k-1,jk}}+1} . \quad (13)$$

Заметим, что так как

$$L_{k-1,j} = m_{kj}, \quad 1 \leq j \leq n_{k-1},$$

$$L_{kj} = 0, \quad 1 \leq j \leq n_k,$$

то соотношение (8) принимает следующий вид:

$$P(D) = P_{k-2}(D) \prod_{j=1}^{n_{k-1}} (m_{kj})! \quad (14)$$

В результате получим следующие формулы для вычисления числа последовательностей вершин для ордерева ограничений D :

$$P(D) = \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{j=1}^{n_i} \prod_{s=1}^{m_{i+1,j}-1} C_{L_{ij} - \sum_{r=1}^{s-1} (L_{i+1,r} + q_{ij,i+1}) + 1}^{L_{i+1,s} + q_{ij,i+1}} \quad (15)$$

$$P(D) = \prod_{i=0}^{k-2} \prod_{j=1}^{n_i} \prod_{s=1}^{m_{i+1,j}-1} C_{L_{ij} - \sum_{r=1}^{s-1} (L_{i+1,r} + q_{ij,i+1}) + 1}^{L_{i+1,s} + q_{ij,i+1}} \cdot \prod_{j=1}^{n_{k-1}} (m_{kj})! \quad (16)$$

Итак, можно сделать следующий вывод, что число всевозможных последовательностей из различных вершин ордерева D с ограничениями на порядок следования вершин в каждой последовательности, задаваемыми тем же ордеревом ограничений D , определяется по формуле (15) или (16). Следствием этого является формула для однородного дерева порядка m :

$$P(D_m) = \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{j=1}^{m^i} \prod_{s=1}^{m-1} \frac{\{(m+1-s) \frac{m-k-i}{m-1}\}!}{\left(\frac{m^{k-i}-1}{m-1}\right)! \{(m-s) \frac{m^{k-i}-1}{m-1}\}!}, \quad (17)$$

где $k = \log_m [1 + N(m-1)] - 1$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.

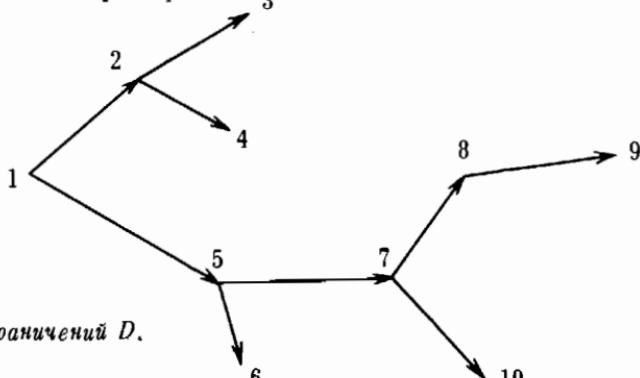


Рис.5. Ордерево ограничений D .

$$P(D) = C_9^3 C_5^1 C_3^1 C_2^1 = 2520. \quad (18)$$

П р и м е р 2

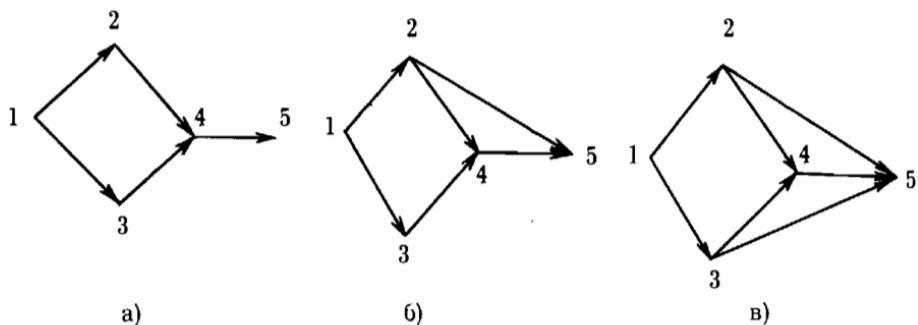
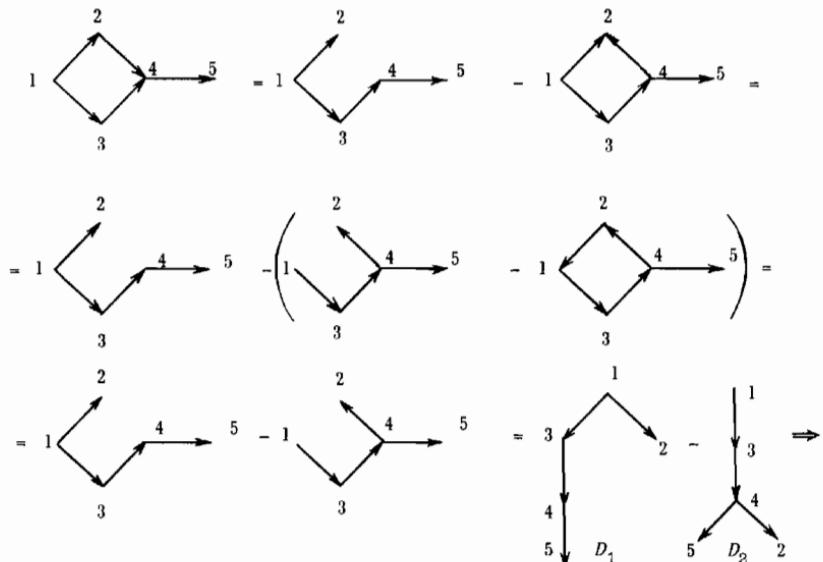


Рис. 6. Ориграф ограничений G_1 .

В задаче подсчета числа последовательностей вершин случаи а) – в) эквивалентны.

Применим алгоритмы "удаления" циклов.



$$P(G_1) = P(D_1) - P(D_2);$$

$$P(D_1) = C_4^1 = 4; \quad P(D_2) = C_4^4 C_3^3 C_2^1 = 2; \Rightarrow P(G_1) = 2. \quad (19)$$

Пример 3

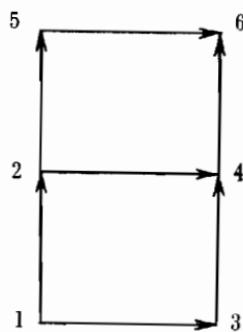
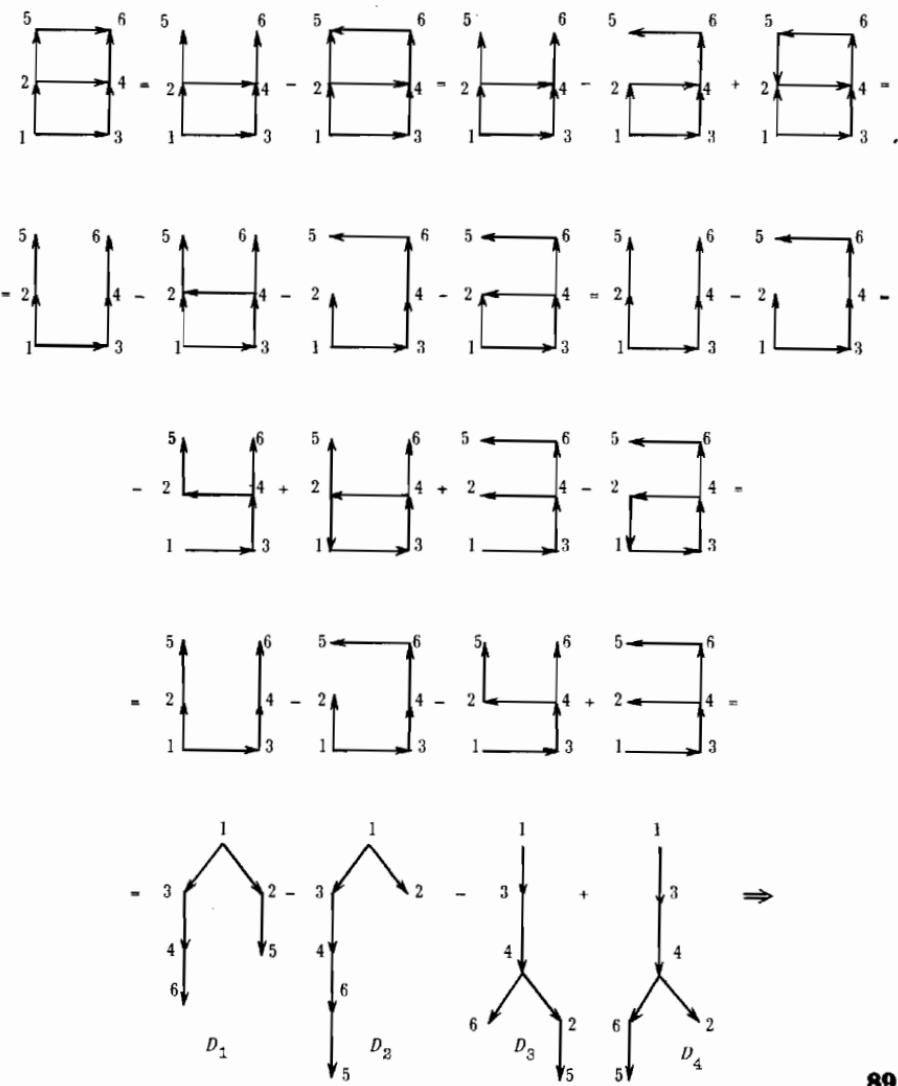


Рис. 7. Ориграф ограничений G_2



$$P(G_2) = P(D_1) - P(D_2) - P(D_3) + P(D_4); \quad P(D_1) = C_5^3 C_2^2 = 10;$$

$$P(D_2) = C_5^4 = 5; \quad P(D_3) = P(D_4) = C_3^2 = 3.$$

$$P(G_2) = 10 - 5 - 3 + 3 = 5 \quad (20)$$

Выводы

1. Адаптивность строительных систем характеризует способность строительной системы к достижению конечных целей строительства в условиях непредвиденных изменений внешней среды и самой системы.
2. В настоящее время отсутствуют методы оценки адаптивности систем строительного производства.
3. Предлагаемый алгоритм является эффективным методом оценки адаптивности широкого класса систем строительного производства.