

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

---

ЖУРНАЛ  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ  
МАТЕМАТИКИ  
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ФИЗИКИ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

УДК 519.854.2

© 1993 г. В. К. ЛЕОНТЬЕВ, О. Г. ТАРАСЦОВ

(Москва, Берлин)

## О ТОЧНОСТИ ЗАДАНИЯ ВХОДНЫХ ДАННЫХ В ТРАЕКТОРНЫХ ЗАДАЧАХ

Исследуется точность задания входных данных в траекторных задачах, при которой исходная постановка еще имеет какой-то физический смысл. Приводится ряд достаточных условий корректности задачи в терминах радиуса устойчивости матрицы входных данных. В этом же ключе исследуются траекторные задачи, в которых для элементов матрицы расстояний заданы лишь интервалы принадлежности.

Хорошо известно, что исходные данные в задачах дискретной оптимизации всегда известны лишь с определенной погрешностью, природа которой зависит от специфики задачи и определяется целым рядом физических и экономических факторов. Однако это обстоятельство не является присущим лишь дискретным экстремальным задачам и сопутствует любым реальным моделям. Спецификой задач дискретной оптимизации является непредсказуемость поведения решений этих задач при возмущении исходных данных, что требует повышенного внимания на этапе подготовки к численному решению. Довольно подробная и убедительная аргументация на эту тему приведена в [1]. Поэтому будем считать отмеченное обстоятельство входящим в условие задачи и полностью сосредоточимся на его последствиях.

В качестве модельной задачи, следуя хорошим традициям, выберем задачу коммивояжера (з.к.) и лишь в конце статьи обсудим вопрос о возможных обобщениях.

Пусть задан полный  $n$ -вершинный ориентированный граф  $G_n$  с матрицей весов  $A = \|r_{ij}\|$  и набором гамильтоновых циклов (г.ц.)  $\tau_1, \dots, \tau_{(n-1)}$ . Длина г. ц.  $\tau_i$  вычисляется по формуле

$$(1) \quad \tau_i(A) = \sum_{(sk) \in \tau_i} r_{sk}.$$

Требуется найти г.ц. с минимальной длиной, который в дальнейшем будем называть оптимальным (о.г.ц.). Множество номеров всех о.г.ц. обозначим через  $\Phi(A)$ . Далее будем считать, что в результате погрешности в измерениях мы имеем дело не с «истинной» матрицей весов  $A$ , а с возмущенной матрицей  $A' = \|r'_{ij}\|$ , где

$$(2) \quad r'_{ij} = r_{ij} + \delta_{ij}.$$

Таким образом, предполагаем, что шум носит аддитивный характер и определяется матрицей шумов  $A_\delta = \|\delta_{ij}\|$ . Порядком возмущения или уровнем шума будем называть чебышёвскую норму матрицы  $A_\delta$ , т. е.  $\|A_\delta\| = \max_{(i,j)} |\delta_{ij}|$ . Ясно, что если уровень шума достаточно велик, то в качестве матрицы  $A'$  можно получить матрицу с любым наперед заданным оптимальным решением, т. е. в этом случае исходная постановка является некорректной и попросту лишенной всякого смысла. Поэтому существует некоторый предел погрешности измерений,

при котором исходная постановка еще является содержательной. Получение возможно полной информации об этом пределе с учетом многовариантности постановок и является целью настоящей работы.

Отметим, что в обычных терминах математического анализа задача коммивояжера является устойчивой, так как малые изменения в исходных данных (элементах  $r_{ij}$ ) влекут малые изменения значения функционала (1), т. е. значения оптимального решения. В то же время основной интерес в задаче коммивояжера представляет не значение функционала качества (1) на оптимальном решении, а сам вид этого оптимального решения, т. е. оптимальный гамильтонов цикл. Относительно такого понимания устойчивости есть много оснований отнести (з.к.) к неустойчивым [1], хотя, конечно, все зависит от исходной матрицы весов.

Переходя к точной постановке задачи, рассмотрим несколько вариантов.

I. Будем считать постановку задачи корректной, если исходная и возмущенная задачи имеют хотя бы один общий оптимальный гамильтонов цикл, т. е.  $\Phi(A) \cap \Phi(A') \neq \emptyset$ .

Пусть  $r_0(A)$  — радиус устойчивости матрицы  $A$  (см. [2]).

**Утверждение 1.** Если  $\|A_\delta\| < r_0(A')$ , то з.к. является корректной.

**Доказательство.** Как следует из (2) и определения радиуса устойчивости, при выполнении условия  $|\delta_{ij}| < r_0(A')$  матрица  $A$  попадает в шар устойчивости матрицы  $A'$ , т. е. выполняется соотношение  $\Phi(A) \subseteq \Phi(A')$ , что и гарантирует корректность исходной задачи.

Отметим, что, по-видимому, абсолютно корректной была бы следующая постановка. При заданной матрице весов  $A = \|r_{ij}\|$  требуется определить предельный уровень шума, при котором для любой возмущенной матрицы  $A'$  выполняется условие  $\Phi(A') \cap \Phi(A) \neq \emptyset$ .

В этом случае ответ был бы следующим: предельный уровень шума равен радиусу устойчивости матрицы  $A$  (см. [3]). Однако в рассматриваемой ситуации нам известна лишь матрица  $A'$ . Поэтому приходится ограничиться тем достаточным условием, которое дает сформулированное выше утверждение.

В утверждении 1 используется минимальная информация о характере иска-  
жений исходной матрицы весов — порядок возмущения. Легко предположить, что более детальная информация о матрице позволит получить и более совершенные утверждения о корректности з.к.

В качестве примера рассмотрим случай, когда нестабильным является единственный элемент  $r_{ik}$  матрицы весов  $A = \|r_{ij}\|$ . Согласно [4], радиус устойчивости матрицы  $A' = \|r_{ij}'\|$  может быть найден следующим образом.

1. Пусть в графе  $G_n$  с матрицей весов  $A'$  имеются оптимальные гамильтоновы циклы, содержащие ребро  $(s, k)$ , и оптимальные гамильтоновы циклы, не содержащие ребра  $(s, k)$ . В этом случае  $r_0(A') = \infty$ . Действительно, если вес ребра  $r_{ik}'$  увеличивается, то оптимальным гамильтоновым циклом в новом графе является любой из оптимальных гамильтоновых циклов старого графа, не содержащий ребра  $(s, k)$ . Если же вес ребра  $r_{ik}'$  уменьшается, то оптимальными остаются те гамильтоновы циклы, которые содержат ребро  $(s, k)$ .

2. Если же все оптимальные гамильтоновы циклы графа  $G_n$  с матрицей весов  $A' = \|r_{ij}'\|$  содержат ребро  $(s, k)$ , то радиус устойчивости может быть вычислен по следующей формуле:

$$(3) \quad \rho_0(A') = \min_{\substack{j \in \varphi(A) \\ (s, k) \notin \tau_j}} [\tau_j(A') - \tau_{\min}(A')].$$

Здесь  $\tau_{\min}(A')$  — длина оптимального гамильтонового цикла в матрице  $A'$ , а минимум в (3) берется по всем неоптимальным гамильтоновым циклам, не содержащим ребра  $(s, k)$ . Приведенный анализ может быть использован следующим образом для выяснения корректности исходной постановки.

**Утверждение 2.** *Если распределение оптимальных гамильтоновых циклов в графе  $G_n$  с матрицей весов  $A'$  удовлетворяет п. 1, то исходная задача является корректной независимо от уровня возмущения. Если же распределение оптимальных гамильтоновых циклов удовлетворяет п. 2, то исходная задача является корректной при выполнении условия  $\|A_\delta\| < \rho_0(A')$ , где  $\rho_0(A')$  вычисляется согласно (3).*

Проведенный выше анализ может быть в значительной степени обобщен в сторону рассмотрения произвольных нестабильных подмножеств ребер графа  $G_n$ . При этом целесообразно использовать результаты о радиусе устойчивости из [3] и [4].

II. Следующее определение корректности з.к. связано с небольшими изменениями оптимального решения.

**Определение 1.** Расстоянием  $r(\tau_i, \tau_j)$  между гамильтоновыми циклами  $\tau_i$  и  $\tau_j$  графа  $G_n$  называется симметрическая разность множеств  $\tau_i$  и  $\tau_j$ .

Будем называть г.ц.  $\tau_i$  и  $\tau_j$  близкими, если  $r(\tau_i, \tau_j) \leq k$ .

Число  $k$  определяется некоторым внешним образом и входит в условие задачи.

**Определение 2.** З.к. называется корректной, если в графе  $G_n$  в возмущенной матрице весов  $A'$  существует о.г.ц., близкий хотя бы к одному из о.г.ц. исходной задачи.

Пусть  $\rho_k(A')$  — радиус  $k$ -устойчивости матрицы  $A'$ , который задается следующей формулой [3]:

$$\rho_k(A') = \min_{j \in \varphi_k(A')} \max_{i \in \varphi(A')} \frac{\tau_j(A') - \tau_i(A')}{2[n - |\tau_i \cap \tau_j|]}.$$

Здесь  $\varphi_k(A')$  — множество г.ц., близких к множеству  $\varphi(A)$ , т. е.  $p \in \varphi_k(A')$ , если в множестве  $\varphi(A)$  существует такой номер  $q$ , что  $r(\tau_p, \tau_q) \leq k$ . Аналогично утверждению 1 можно привести следующий признак корректности задачи коммивояжера в смысле приведенного выше определения.

**Утверждение 3.** *Если  $\|A_\delta\| < \rho_k(A')$ , то з.к. является корректной.*

III. Следующий вариант связан с рассмотрением явной неопределенности, когда для каждого элемента  $r_{ij}$  матрицы весов  $A = \|r_{ij}\|$  задан лишь интервал  $[u_{ij}, v_{ij}]$ , в котором находится этот элемент. Иногда такой способ задания называют интервальной з.к. Как и во всех предыдущих случаях, в такой ситуации может быть несколько различных подходов к понятию решения.

**Определение 3.** Любая матрица  $A^0 = \|v_{ij}^0\|$ , элементы которой удовлетворяют неравенствам

$$(4) \quad u_{ij} \leq r_{ij}^0 \leq v_{ij},$$

называется реализацией интервальной з.к.

Множество матриц, элементы которых удовлетворяют неравенствам (4), обозначим через  $T_n$ .

В случае интервальной з.к. оправданными являются как поиски реализаций с максимально «длинным» решением, так и поиски реализаций с небольшим значением функционала [1].

В основу понятия корректности, как и выше, положим сам вид оптимального решения. Пусть

$$S = \bigcup_{A \in T_n} \varphi(A).$$

Ясно, что в множество  $S$  входят номера тех г.ц., которые могут быть решениями некоторых з.к. с матрицами весов из множества  $T_n$ .

**Определение 4.** Интервальная з.к. (4) называется корректной, если множество  $S$  не содержит номера всех г.ц. полного графа  $G_n$ .

Смысл приведенного определения состоит в том, что если  $S = \{1, 2, \dots, (n-1)!\}$ , то при отсутствии какой-либо дополнительной информации произвольный г.ц. графа  $G_n$  может быть с одинаковым основанием взят в качестве решения интервальной з.к. В этом случае естественно считать, что исходная интервальная постановка не является достаточно определенной.

Ясно, что выяснение корректности той или иной интервальной з.к. связано с построением множества  $S$ , задание которого в приведенной выше форме не содержит в себе конструктивного алгоритма для синтеза  $S$ . Решению этой задачи служит следующее.

Покажем, что в формуле для  $S$  достаточно ограничиться конечным числом слагаемых. Рассмотрим самую «левую» реализацию интервальной задачи (4), т.е. матрицу  $A = \|u_{ij}\|$ . Пусть, как обычно,  $\varphi(A)$  — множество номеров о.г.ц. графа с матрицей весов  $A$ . Для того чтобы узнать, входит ли данное число  $j \notin \varphi(A)$  в множество  $S$ , поступаем следующим образом:

- 1) находим «расстояние»  $\Delta'$  от матрицы  $A$  до конуса  $F'$  по формуле

$$(5) \quad \Delta' = \max_{i \in \varphi(A)} \frac{\tau_i(A) - \tau_i(A)}{n - |\tau_i \cap \tau_j|};$$

- 2) строим матрицу  $B = \|B_{sr}\|$  следующим образом:

$$B_{sr} = \begin{cases} u_{sr} + \Delta' & \text{при } (s, r) \notin \tau_j, \\ u_{sr} & \text{при } (s, r) \in \tau_j; \end{cases}$$

- 3) «урезаем» матрицу  $B = \|b_{sr}\|$  согласно соотношениям

$$b_{sr}' = \begin{cases} b_{sr}, & \text{если } b_{sr} \leq v_{sr}, \\ v_{sr}, & \text{если } b_{sr} > v_{sr}; \end{cases}$$

- 4) если  $j \in \varphi(B')$ , где  $B' = \|b_{sr}'\|$ , то  $j \in S$ , если же  $j \notin \varphi(B')$ , то  $j \notin S$ .

Все понятия, используемые в изложенном алгоритме, и обоснование его корректности фактически содержатся в [3], [4] или могут быть легко из них получены. Здесь же для наглядности изложения сформулируем только следующее простое утверждение, на котором, по существу, основан предложенный алгоритм. Пусть  $j \notin \varphi(A)$  и надо из матрицы  $A$  получить «ближайшую» к ней матрицу  $B$ , в множестве о.г.ц. которой уже содержится г.ц.  $\tau_j$ . Тогда надо (учитывая, что элементы  $A$  могут быть только увеличены по условию интервальной з.к.) все элементы, входящие в г.ц.  $\tau_j$  матрицы  $A$ , оставить без изменений, а остальные увеличить на одну и ту же величину, определяемую условием преобразования, т. е. фактически формулой (5). В заключение обратимся к некоторым простым признакам выявления корректности или некорректности интервальной з.к. (4).

Пусть

$$b_{ij} = \frac{v_{ij} + u_{ij}}{2}, \quad b_{ij}^0 = \frac{v_{ij} - u_{ij}}{2}, \quad B^0 = \|b_{ij}^0\|, \quad \Delta^0 = \min_{i \neq j} b_{ij}, \quad B = \|b_{ij}\|.$$

Рассмотрим следующую систему линейных уравнений:

$$(6) \quad x_i + y_j = b_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть  $\Delta$  — невязка системы (6), т. е.

$$\Delta = \min_{x, y} \max_{(i, j)} |x_i + y_j - b_{ij}|.$$

**Утверждение 4.** Если  $\Delta^0 > \Delta$ , то интервальная з.к. (4) является некорректной.

**Доказательство** этого утверждения непосредственно следует из определения невязки и того хорошо известного факта, что в графе  $G_n$  с матрицей весов  $A^0 = \|x_i + y_j\|$  все г.ц. являются оптимальными, т. е.  $\varphi(A^0) = \{1, 2, \dots, (n-1)!\}$ .

В содержательном смысле утверждение 4 накладывает явные ограничения на длины интервалов изменения весов в интервальной з.к.

Отметим также, что нахождение невязки системы (6) легко сводится к решению задачи линейного программирования.

Следующее достаточное условие корректности интервальной з.к. также является простым следствием уже использованных понятий.

**Утверждение 5.** Если выполнены неравенства  $b_{ij}^0 \leq p_0(B)$ , то интервальная з.к. (4) является корректной.

Отметим в заключение, что все приведенные выше утверждения могут быть легко обобщены на траекторные задачи, для которых справедливы соответствующие факты, относящиеся к радиусу устойчивости [3].

#### Список литературы

1. Сергиенко И. В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. Киев: Наук. думка, 1985.
2. Леонтьев В. К. Устойчивость задачи коммивояжера//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. Т. 15. № 5. С. 1298—1300.
3. Леонтьев В. К., Гордеев Э. Н. Качественное исследование траекторных задач//Кибернетика. 1986. № 5. С. 82—89.
4. Леонтьев В. К. Устойчивость в линейных дискретных задачах//Пробл. кибернетики. 1979. Вып. 35. С. 169—184.