

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Э.Н.Гордеев<sup>\*1</sup>, О.Г.Тарасцов<sup>\*\*</sup>

*\*The Computer Center of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

*\*\*Fachhochschule Fulda, Fulda, BRD*

В работе исследуется устойчивость решений задач вычислительной геометрии, возникающих при рассмотрении движения объекта в пространстве с препятствиями. При этом возмущениям подвергаются координаты точек, определяющих условия задачи. Показано, что в ряде случаев исследование устойчивости может основываться на результатах, полученных для задач дискретной оптимизации. Получены критерии устойчивости и аналитические выражения для количественной характеристики устойчивости.

## §1. Введение

В последние годы в задачах вычислительной геометрии начинает приобретать актуальность проблема изучения поведения решений при возмущении входных данных. Неформально говоря, исследуется предел инвариантных относительно комбинаторной структуры решения задачи возмущений координат точек, определяющих условия задачи.

Особенно важны подобные исследования в прикладных проблемах, возникающих в робототехнике. Этому способствуют следующие причины. Оптимизация и планирование перемещения объекта фиксированной формы в пространстве с препятствиями (см., например, [1], [2], [3], [4]) требует обычно решения целого комплекса задач вычислительной геометрии: построение графа видимости, диаграммы Вороного, оствового дерева некоторого множества точек, кратчайшего пути между точками и т.д.

Неточность в этих задачах содержится не только в ошибках измерения координат точек или вычисления геометрических характеристик, но и в самой постановке. Ведь вместо сложного объекта – робота мы вынуждены в рамках разработанной алгоритмической техники рассматривать, например, диск [1] или многоугольник [2]. Та же ситуация и с представлением препятствий. Ошибка, вносимая подобными огрублениями условий, может быть сразу оценена, т.е. мы можем ориентироваться не только на обычный алгоритм решения задачи, но и на обязательный анализ устойчивости получаемых решений.

Третья причина состоит в том, что распространенное в теоретических исследованиях стремление избегать вырожденных случаев (см., например, [2], [5]) на практике плохо применимо. Да и теоретически, как показано в [6], представляется

очень спорным. Располагая же методами исследования устойчивости, мы, грубо говоря, не только не пренебрегаем случаями вырожденности, но и всюду их ищем.

Конечно, предлагаемый подход по трудоемкости и сложности превосходит простое применение некоторого известного алгоритма решения той или иной задачи. Но эта неизбежность не столь обременительна, если учесть следующую особенность рассматриваемых задач. Обычный алгоритм предполагает применение на произвольных индивидуальных задачах, а критичным фактором является размерность задачи. В рассматриваемой ситуации робот будет двигаться многократно, используя вычисленное решение, само же планирование его движения осуществляется заранее, т.е. размерность задачи может быть не столь критична. Важно же произвести скрупулезный анализ спектра "близких" задач на стадии планирования движения.

Основные вопросы, на которые подобное исследование отвечает, следующие. На какую величину можно независимо изменять координаты входных точек задачи, чтобы при любых возмущениях в пределах этой величины "геометрия" решений возмущенных задач совпадала с "геометрией" полученного решения исходной задачи? Как устойчивость решения связана с вырожденностью задачи? Однаково ли полезны алгоритмы решения задачи, имеющие одну и ту же сложность, для исследования ее устойчивости? Эти вопросы так или иначе затрагивались в ряде работ (см., например, [5], [6], [12], [13], [14]).

В задачах дискретной оптимизации проблема исследования устойчивости решений имеет уже двадцатилетнюю историю, и разработан ряд общих подходов к такого рода исследованиям. Один из таких подходов предложен в работах [7] – [11]. Он базируется на понятиях области устойчивости и радиуса устойчивости. Здесь мы, в частности, рассмотрим возможность применения этого подхода к некоторым задачам вычислительной геометрии. Приведенные примеры покажут и границы применения вышеупомянутого подхода.

## §2.Формальное описание подхода.

Рассмотрим класс задач дискретной оптимизации, который описывается следующей моделью. Пусть  $T = \{t_1, \dots, t_n\}$  – некоторое множество,  $D_n = \{\tau_1, \dots, \tau_m\}$ ,  $m > 1$ , – система подмножеств множества  $T$ , называемых траекториями. Элементам из  $T$  приписаны веса  $a(t_1) = a_1, \dots, a(t_n) = a_n$ . И пусть вектор  $T = (a_1, \dots, a_n)$ , берется из векторного пространства  $R^n$ . На каждой траектории определяется функционал  $\tau(A)$  – длина траектории при взвешивании  $A$ . Практически все содержательные результаты для задач комбинаторной оптимизации получены для двух видов функционалов:

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке фондов РФФИ – 93 – 012 – 449, INTAS – 94 – 1704.

$$\tau(A) = \sum_{e_j \in \tau} a_j \quad (*)$$

$$\tau(A) = \max_{e_j \in \tau} |a_j| \quad (**)$$

Под дискретной оптимизационной задачей мы будем понимать тройку  $(T, D_n, w)$ , где  $w$  – отображение из  $R^n$  в  $D_n$ , с определенным на ней типом функционала. В дискретных экстремальных задачах  $w$  отображает  $A$  в траекторию экстремальной длины. При этом в случае функционала (\*) задача будет называться линейной, а в случае функционала на (\*\*) – задачей на узкие места. Будем обозначать через  $Z_A$  индивидуальную задачу массовой задачи  $(T, D_n, w)$ , определяемую путем задания вектора  $A$ .

Решениями задачи называются траектории, доставляющие экстремум функционалу (оптимальные траектории). В указанную схему укладываются все задачи, так называемой, комбинаторной оптимизации, в частности, все оптимизационные задачи на графах, что подчеркивается выделением в определении задания множества  $D_n$ . Например, если  $T$  – множество ребер графа  $G$ ,  $D_n$  – множество гамильтоновых циклов графа, тогда  $(T, D_n, w)$  – задача коммивояжера.

Множество номеров оптимальных траекторий задачи при взвешивании  $A$  обозначим через  $I(A)$ , а длину оптимальной траектории – через  $m(A)$ . Через  $S_D(A)$  обозначим открытый шар в  $R^n$  с центром в  $A$  и радиуса  $D$ . Пусть  $R_0 = \{A: A \in R^n, |I(A)| = m\}$  и в пространстве  $R^n$  задана норма.

Назовем задачу  $Z_A$   $\varepsilon$ -устойчивой, если для любого  $B \in R^n$ ,  $\|B\| < \varepsilon$ , выполняется условие  $I(A+B) \subseteq I(A)$ . Радиус устойчивости задачи  $Z_A$ ,  $A \in R_0$ , полагаем по определению равным нулю, в противном случае радиусом устойчивости назовем  $\sup \varepsilon$ , где  $\sup$  берется по всем  $\varepsilon$ , для которых  $Z_A$  является  $\varepsilon$ -устойчивой. Обоснование, подробный анализ введенных определений, а также исследование устойчивости многих известных оптимизационных задач как с линейным, так и с минимаксным функционалом при различных типах норм в  $R^n$  можно найти, например, в [7] – [11]. Таким образом, радиус устойчивости  $I(A)$  задает предел возмущений элементов весового вектора задачи  $Z_A$ , при которых не расширяется множество оптимальных решений.

Перейдем к задачам вычислительной геометрии. При проведении различных аналогий с задачами дискретной оптимизации будем предполагать, что  $A \notin R_0$ . Сформулируем теперь задачу вычислительной геометрии в следующем виде.

Пусть  $T = \{t_1, \dots, t_n\}$  – множество точек векторного пространства,  $L_n = \{l_1, \dots, l_m\}$ ,  $m > 1$ , система подмножеств множества  $T$ , а  $F[L_n] = \{f_1, \dots, f_N\}$  – множество геометрических объектов, в котором каждый объект определяется последовательностью точек из  $T$  (возможны повторения). Пусть  $t^*_i = \{t_{i1}, \dots, t_{id}\}$

координаты точки  $t_i$  в пространстве  $R^d$ . Таким образом, точка  $T^* = \{t_{11}, \dots, t_{1d}, t_{21}, \dots, t_{2d}, t_{n1}, \dots, t_{nd}\} \in R^{nd}$  соответствует множеству  $T$ .

Множество  $F[L_n]$  задано таким образом, что существует всюду определенное отображение  $w: R^d \rightarrow F[L_n]$ . Тогда объект  $w(T^*)$  будем называть решением задачи. Под задачей вычислительной геометрии мы будем подразумевать четверку  $(T, L_n, F[L_n], w)$ . Будем обозначать через  $Z(T^*)$  индивидуальную задачу массовой задачи  $(T, L_n, F[L_n], w)$ , определяемую путем задания вектора  $T^*$ . Рассмотрим несколько примеров.

1. Если  $T$  – множество вершин графа  $G$  на евклидовой плоскости,  $L_n$  – множество всех путей в графе из вершины  $s$  в вершину  $t$ ;  $F[L_n] = L_n$ . Фиксируя координаты вершин графа и считая длиной пути сумму длин ребер, будем отображать с помощью  $w$  точку  $T^*$  в путь минимальной длины. В результате в качестве задачи  $(T, L_n, F[L_n], w)$  получаем известную задачу о кратчайшем пути в графе на плоскости.

2. Если в предыдущем примере изменить только одно условие:  $L_n$  – множество остовных деревьев графа, то получаем известную задачу о кратчайшем остовном дереве в графе на плоскости.

3. Пусть  $T = \{t_1, \dots, t_n\}$  – множество точек векторного пространства  $R^d$ ;  $I_i = \{t_{i1}, \dots, t_{ik}\}$  – многогранное препятствие с вершинами  $t_{i1}, \dots, t_{ik}$ ;  $f_i$  – граф видимости, заданный с помощью последовательности  $\{t_{i1}t_{j1}, \dots, t_{ik}t_{jk}\}$ , где пара точек  $t_{is}, t_{js}$  задает концы ребра графа видимости, т.е. интервал прямой между этими точками не пересекает препятствий. Фиксируя координаты точек, мы отображаем  $T^*$  в граф видимости  $w(T^*)$ . Получаем известную задачу вычислительной геометрии о построении графа видимости.

4. Если в предыдущем примере изменить только одно условие: пара точек  $t_{is}, t_{js}$  определяет соседство областей Вороного в задаче построения диаграммы Вороного, то вновь получаем хорошо известную задачу вычислительной геометрии. (Суть задачи состоит в нахождении для заданного конечного набора точек (терминалов)  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  такого разбиения линейного пространства  $R^d$  с определенной на нем функцией расстояния на части (области близости)  $P_1, P_2, \dots, P_n$  такие, что расстояние от любой точки  $t \in P_i$  до точки  $p_j$  не превосходит расстояния от  $t$  до  $p_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Обзор результатов, связанных с алгоритмами решения этой задачи и ее обобщений, можно найти, например, в [11], [12]. Заметим, в частности, что на плоскости для любой метрики  $|p|_r$ ,  $r = 1, \dots, \infty$ , задача решается за время  $O(n \log n)$ . С ростом  $d$  сложность растет экспоненциально.)

Пусть теперь  $T, L_n, F[L_n]$  и  $w$  фиксированы и в  $R^{nd}$  задана метрика. Обозначим соответственно через  $U_r(T^*)$  и  $U^*_r(T^*)$  открытый и замкнутый (с центром в  $T^*$  и радиуса  $r$ ) в  $R^{nd}$ .

Назовем задачу  $Z(T^*)$   $r$ -устойчивой, если существует  $r > 0$  такое, что для любого  $B$  из  $U_r(T^*)$ ,  $\|B\| < r$ , выполняется условие  $w(B) = w(T^*)$ . Радиусом устойчивости

задачи  $Z(T^*)$  назовем *supr*, где *sup* берется по всем  $t$ , для которых  $Z(T^*)$  является  $t$  – устойчивой.

Радиус устойчивости задачи  $Z(T^*)$  будем обозначать через  $r(T^*)$ .

## §2. Три подхода к исследованию устойчивости.

Сравнив два предложенных в предыдущем параграфе формализма, рассмотрим проблему соотношения подходов к исследованию устойчивости в задачах дискретной оптимизации и вычислительной геометрии. Будет рассмотрено три ситуации. В первом случае возможен непосредственный перенос результатов, полученных для задач дискретной оптимизации. Во втором случае вышеупомянутая аналогия приводит к тривиальным постановкам. В третьем случае для исследования устойчивости непосредственных аналогий недостаточно.

Рассмотрим первую ситуацию. Пусть, например, в  $R^{nd}$  задана чебышевская метрика. Следующее ограничение выполняется для большого количества известных задач вычислительной геометрии. Задача  $(T, L_n, F[L_n], w)$  определена таким образом, что  $F[L_n] = L_n$ , а в  $Z(T^*)$  каждый элемент  $f_i$  из  $L_n$  имеет некоторый вес  $f_i(T^*)$ . Отображение  $w: T^* \rightarrow l^*$  таково, что  $l^*$  имеет экстремальный вес  $l^*(T^*)$  среди всех элементов  $L_n$ .

Например, если в  $R^d$  задана евклидова метрика,  $l$  – некоторое множество ребер графа на плоскости и  $l(T^*)$  – сумма длин этих ребер, то мы получаем задачу дискретной оптимизации  $(T, L_n, w)$  из задачи вычислительной геометрии  $(T, L_n, F[L_n], w)$ . Для удобства, иногда  $T^*$  можно представлять в виде матрицы  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , где

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{\sum_{s=1}^d (t^*_{is} - t^*_{js})^2} & \text{, если существует } l_s \in L_n \text{ такое, что } t_i \text{ и } t_j \text{ – смежны;} \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Назовем вышеприведенные две задачи *соответственными*, а матрицу  $A$  – представлением  $T^*$ . Однако, если в обычной задаче дискретной оптимизации  $(T, L_n, w)$  возмущаются независимо (независимость здесь – это свойство чебышевской нормы) элементы матрицы  $A$ , которая представляет вектор  $T^*$  (это мы подчеркнем путем обозначения радиуса устойчивости такой задачи через  $r(A)$ ), то в задаче дискретной оптимизации  $(T, L_n, w)$ , которая соответствует некоторой задаче вычислительной геометрии, возмущению подвергаются координаты точек, определяющие элементы матрицы  $A$  (это мы подчеркнем, обозначая радиус устойчивости этой задачи через  $r(T^*)$ ). Суть метода заключается в использовании для  $r(T^*)$  формул и алгоритмов, известных для  $r(A)$ .

Во – первых, значение  $r(A)$  может быть непосредственно использовано для оценок  $r(T^*)$ . При этом как для линейной так и для минимаксной задач дискретной оптимизации справедливо следующее соотношение.

$$r(A) \leq 2d^{1/2}r(T^*).$$

Для доказательства рассмотрим сначала случай линейной задачи (случай задач на узкие места рассматривается аналогично). В [7] показано, что

$$r(A) = \min_{j \notin I(A)} \max_{i \in I(A)} |\tau_i(A) - \tau_j(A)| / (|\tau_i| + |\tau_j| - 2|\tau_i \cap \tau_j|), \quad (1)$$

а величина  $r_{ij}(A) = |\tau_i(A) - \tau_j(A)| / (|\tau_i| + |\tau_j| - 2|\tau_i \cap \tau_j|)$  обладает тем свойством, что при добавлении ее ко всем элементам  $\tau_i$  и вычитании из всех элементов  $\tau_j$  длины этих траекторий сравняются. При этом мы считаем что все элементы  $T^*$  возмущаются независимо. Рассмотрим теперь соответственную задачу и используем идею доказательства формулы (1) из [7], где, в частности, показано, что для любой пары  $\tau_i$  и  $\tau_j$  оптимальной и неоптимальной траекторий возмущения элементов на величины, меньшие  $r_{ij}(A)$ , не может привести к выравниванию длин .

Если возмущаются координаты точек из  $T$ , то очевидно соотношение  $r(A) \leq r(T^*)$ . Пусть  $r_{ij}(T^*)$  – минимальная величина независимых возмущений координат точек из  $T$ , при которой выравниваются длины пары  $\tau_i$  и  $\tau_j$  оптимальной и неоптимальной траекторий. Используя следствие из теоремы 1 [8], можно показать, что

$$r(A) = \min_{j \notin I(A)} \max_{i \in I(A)} r_{ij}(A), \quad (2)$$

где  $A$  является представлением  $T^*$ .

Пусть и  $\tau_i$  не имеет общих точек с  $\tau_j$ , тогда очевидно, что в  $U^* r(T^*)$  при  $r = r_{ij}(A)/2d^{1/2}$  может найтись точка  $W$  такая, что  $\tau_i(W) = \tau_j(W)$ , т.е.  $r_{ij}(A)/2d^{1/2} \leq r_{ij}(T^*)$ .

Если  $\tau_i$  имеет общие точки с  $\tau_j$ , тогда можно показать, что увеличив на  $\delta$  длины всех ребер  $\tau_i \setminus \tau_j$  графа на плоскости за счет возмущения координат точек из  $T$  на величины  $\delta/2d^{1/2}$ , мы можем не суметь без изменения длин оставшихся ребер из  $\tau_i$  уменьшить на  $\delta$  длины ребер из  $\tau_j \setminus \tau_i$ . То есть, снова  $r_{ij}(A)/2d^{1/2} \leq r_{ij}(T^*)$ .

Далее используя (2) и условие единственности оптимального решения, получаем требуемое неравенство.

Очевидно, что аналогичные границы с использованием формул для радиуса устойчивости из [7] – [11], сравнительно просто получить для различного типа метрик в  $R^{nd}$  и вида объектов из  $F[L_n]$ . Однако, можно пойти другим путем и получать точные формулы и алгоритмы для  $r(T^*)$ , используя модификации формул для  $r(A)$ , приведенных в [7] – [11]. Этот метод мы проиллюстрируем следующими примерами.

В [8] изучалась устойчивость дискретных оптимизационных задач на матроидах. В частности, для задачи о кратчайшем остове с линейным

функционалом и единственным оптимальным решением из формул, полученных в [8], имеем

$$r(A) = \min_{e \notin \tau} \min_{u \in C(E)/\{e\}} (w(e) - w(u)) / 2,$$

где  $\tau$  – оптимальное решение,  $e \notin \tau$ ,  $C(e)$  – цикл  $\{e\} \cup \tau$ .

По аналогии с доказательством этой формулы можно показать, что в соответственной задаче о кратчайшем остове радиус устойчивости  $r(T^*)$  может быть вычислен с помощью формулы

$$\min_{e \notin \tau} \min_{u \in C(E)/\{e\}} f(e, u). \quad (3)$$

Здесь  $f(e, u)$  вычисляется следующим способом. Пусть  $a^1, a^2, b^1, b^2$  – концы ребер  $e$  и  $u$ .

Если  $e$  и  $u$  не смежны, тогда  $f(e, u)$  – решение нижеприведенной оптимизационной задачи

$$\begin{cases} \Delta \rightarrow \min; \\ ((a_x^1 \pm \Delta) - (a_x^2 \pm \Delta))^2 + ((a_y^1 \pm \Delta) - (a_y^2 \pm \Delta))^2 = ((b_x^1 \pm \Delta) - (b_x^2 \pm \Delta))^2 + ((b_y^1 \pm \Delta) - (b_y^2 \pm \Delta))^2. \end{cases}$$

Знаки в каждой скобке однозначно определяются, исходя из координат точек.

Если  $e$  и  $u$  смежны, например  $a^1 = b^1$ , тогда предыдущая оптимизационная проблема сводится к задаче

$$\begin{cases} \Delta \rightarrow \min; \\ (a_x^1 - (a_x^2 \pm \Delta))^2 + (a_y^1 - (a_y^2 \pm \Delta))^2 = (b_x^1 - (b_x^2 \pm \Delta))^2 + (b_y^1 - (b_y^2 \pm \Delta))^2. \end{cases}$$

Заметим, что смысл формулы (3) не в этих простых алгоритмах для  $f(e, u)$ , а в возможности анализа возмущений координат концов ребер  $e$  и  $u$  независимо от возмущений других ребер в условиях задачи.

В качестве второго примера рассмотрим задачу о кратчайшем пути между двумя вершинами графа на евклидовой плоскости. Эта задача дискретной оптимизации исследовалась на устойчивость решений в работе [8].

Пусть  $\tau$  оптимальная траектория,  $\tau = \{e_1, \dots, e_k\}$ , где  $e_1, \dots, e_k$  – последовательность попарно смежных ребер, образующих путь между вершинами  $s$  и  $t$ . Пусть  $C = \{C_i\}$  – множество простых циклов графа  $G$  таких, что для любого цикла существуют целые  $p$  и  $q$ :

$$1 \leq p \leq q; 1 \leq p + q \leq k; C_i \cap \tau = \{e_p, e_{p+1}, \dots, e_q\}.$$

В [8] для радиуса устойчивости получена формула

$$r(A) = \min_{\substack{\tau_j \cap \tau \in C \\ j \notin I(A)}} |\tau_j(A) - \tau(A)| / (|\tau| + |\tau_j| |A| - 2 |\tau \cap \tau_j|).$$

Вновь аналогично этой формуле можно для соответственной задачи вычислительной геометрии доказать соотношение

$$r(A) = \min_{\substack{\tau_j \cap \tau \in C \\ j \notin I(A)}} f(C_j). \quad (4)$$

Здесь  $f(C_j)$  вычисляется следующим образом.

Пусть  $C_j = \{e_1, \dots, e_k\}$ ,  $C_j \cap \tau = \{e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q}\}$  и концы ребра  $e_i$  имеют координаты  $a_x^i, a_y^i, a_x^{i+1}, a_y^{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, k$  (где для простоты полагаем  $e_{k+i} = e_i$ ). Тогда для нахождения  $f(C_j)$  решаем оптимизационную задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \rightarrow \min; \\ \sum_{j=p}^{p+q-1} ((a_x^j \pm \Delta) - (a_x^{j+1} \pm \Delta))^2 + ((a_y^j \pm \Delta) - (a_y^{j+1} \pm \Delta))^2 \\ = \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin \{p, \dots, p+q-1\}}}^k ((a_x^j \pm \Delta) - (a_x^{j+1} \pm \Delta))^2 + ((a_y^j \pm \Delta) - (a_y^{j+1} \pm \Delta))^2 \end{array} \right.$$

Обратим внимание на то, что вычисление по формуле (4) может носить переборный характер, так как в [8] доказана NP – полнота проблемы нахождения радиуса устойчивости в задаче о кратчайшем пути на графе в общем виде даже при отсутствии в графе циклов отрицательной длины. Как мы уже говорили во введении, с точки зрения рассматриваемых в настоящей работе прикладных аспектов размерность задачи может быть небольшой и можно позволить себе различные варианты метода ветвей и границ, описанные в [9] для данной задачи. Там же приведены следующие два утверждения, касающиеся полиномиальных частных случаев.

*Утверждение 1.* Пусть число оптимальных траекторий  $|I(A)|$  задачи  $Z_A$  ограничено полиномом числа вершин графа  $n$ , а веса всех ребер одинаковы, тогда радиус устойчивости может быть вычислен за время  $O(mn^3|I(A)|)$ , где  $m$  – число ребер графа.

Из этого утверждения следует и наличие псевдополиномиального алгоритма, который и построен в [9] с использованием алгоритма Йена для нахождения  $|I(A)|$  кратчайших путей в графе между вершинами  $s$  и  $t$ .

Второй частный случай требует малого числа ребер в оптимальном решении.

*Утверждение 2.* Пусть веса всех ребер положительны, оптимальная траектория единственна и число ребер в ней равно некоторой константе  $k$ , тогда радиус устойчивости может быть найден за время  $O(n^2)$ .

В [7],[9],[10] рассмотрен еще ряд известных задач на графах и пересечениях матроидов. По аналогии с вышеприведенными примерами для всех аналогов этих задач, являющиеся соответственными задачами вычислительной геометрии можно построить формулы и алгоритмы вычисления радиуса устойчивости, путем вставки вспомогательной процедуры, являющейся аналогом решения вышеприведенных оптимизационных задач. При этом заметим, что вид ограничений легко изменяется, если вместо евклидовой плоскости использовать другую метрику или рассматривать  $d$  – мерное пространство.

Перейдем теперь ко второй из упомянутых в начале этого раздела ситуаций. Она возникает тогда, когда проведение аналогий между задачами дискретной

оптимизации и вычислительной геометрии в рамках рассмотренного во втором параграфе формализма приводит к задаче с очевидным решением. Формальная модель одной из таких задач — задачи о построении графа видимости — приведена в том же параграфе.

Пусть  $G$  — граф видимости,  $G^*$  — граф, дополнительный к  $G$ ,  $T$  — множество вершин этих графов. Пусть  $r(e, t)$  — расстояние от ребра графа  $e$  до точки  $t \in T$ , которая не является концом этого ребра. Очевидно, что радиус устойчивости полностью определяется величиной

$$r(T^*) = \min \left\{ \min_{e \in G} \min_{t \in T} r(e, t); \min_{e \in G^*} \min_{t \in T} r(e, t) \right\} / 2.$$

Третья ситуация возникает в ряде "неоптимизационных" задач вычислительной геометрии (см., например, [12] — [16]). По сути дела исследование устойчивости сводится к описанию всех возможных типов вырожденности индивидуальных задач данной общей задачи, а количественная характеристика, например, радиус устойчивости, определяется расстояние от данной задачи до ближайшей вырожденной задачи. Вырожденные задачи считаются неустойчивыми.

Различные подходы такого типа предложены в работах [14] — [16]. Рассмотрим часто возникающую в робототехнике задачу построения диаграммы Вороного.

Пусть имеется некоторая индивидуальная задача. Множество терминальных точек, равноудаленных от вершины диаграммы Вороного и определяющих эту вершину назовем конфигурацией  $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ . Известно, что точки конфигурации лежат на поверхности максимального пустого (не содержащего внутри себя терминалов) шара. В [14] доказано, что задача исследования глобальной устойчивости может быть сведена к задаче исследования устойчивости диаграммы на множествах терминалов конфигураций. Были рассмотрены функции расстояния самого общего вида в пространствах произвольной размерности.

Приведем в качестве примеров два утверждения из [14], касающихся критериев устойчивости, а затем рассмотрим следствие для случая евклидовой плоскости и чебышевской нормы в  $R^{dn}$ .

**Утверждение 3.** Пусть устойчивая конфигурация  $P = \{p_1, \dots, p_k\}$  лежит на пустой сфере, тогда  $d + 1 \geq k$ .

**Утверждение 4.** Пусть конфигурация  $P = \{p_1, \dots, p_k\}$  лежит на пустой сфере, норма  $\|\cdot\|_L$  в пространстве  $R^d$  — кусочно-линейна. В этом случае  $P$  устойчива тогда и только тогда, когда при любом выборе граней, содержащих точки  $p_i$ , вектора нормалей к сфере (к соответствующим граням) в точках конфигурации аффинно независимы.

Рассмотрим теперь случай евклидовой плоскости и будем считать, что  $n > 2$ . Итак, пусть имеется некоторая задача  $Z(P)$  и диаграмма Вороного  $D(P)$ . Введем три параметра.

Используем чебышевскую метрику  $r_H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  на плоскости в качестве нормы  $\|\cdot\|_{H,v}$  пространстве  $R^{2n}$ . (Заметим, что введение этой метрики не связано с метрикой, для

которой строилась диаграмма Вороного.) То есть для двух точек плоскости  $\mathbf{a} = \{a_x, a_y\}$  и  $\mathbf{b} = \{b_x, b_y\}$

$$r_H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \max \{ |a_x - b_x|, |a_y - b_y| \}.$$

За расстояние  $r_H(\mathbf{a}, M)$  от точки  $\mathbf{a}$  до множества  $M$  берем, как обычно, минимальное расстояние от  $\mathbf{a}$  до точек множества  $M$ . Рассмотрим конфигурацию  $\tau = \{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \}$  и множество прямых  $L$  на плоскости. Через  $\delta(\tau)$  обозначим

$$\min_{l \in L} \max_{i=1,2,3} r_H(a_i, l),$$

а через  $\delta(P) = \min \delta(\tau_i)$ , где минимум берется по всем тройкам точек из  $P$  таким, что в  $D(P)$  есть вершина  $\tau_i$ , равноудаленная от каждой из точек тройки  $\tau_i$ . Если множество таких вершин пусто, то полагаем, что  $\delta(P) = \infty$ .

Рассмотрим теперь некоторую неограниченную область Вороного  $P_i$ . Среди ребер ее границы имеется ровно два неограниченных ребра. Если они параллельны, то полагаем  $\beta(P_i) = 0$ . В противном случае эти ребра лежат на границах  $P_i$  с областями  $P_u$  и  $P_v$ , и мы положим

$$\beta(P_i) = \delta(\tau(i, u, v)),$$

где  $\tau(i, u, v)$  — конфигурация из трех точек  $\{p_i, p_u, p_v\}$ , а через  $\beta(P)$  обозначим минимум  $\beta(P_i)$  по всем неограниченным областям диаграммы Вороного  $D(P)$ . Заметим, что в любой диаграмме существуют неограниченные области. Обозначим через  $Q(P)$  множество таких областей, а через  $J(P)$  — такое подмножество  $Q(P)$ , что области, в него входящие, имеют на своей границе параллельные бесконечные ребра.

Каждой диаграмме  $D(P)$  в рассматриваемом случае можно сопоставить помеченный граф  $G(P)$  на плоскости, вершинам которого соответствуют вершины диаграммы и точка  $\infty$ , помеченные произвольным образом, а ребром — либо конечные ребра диаграммы, помеченные пометками концевых вершин, либо бесконечные ребра, помеченные пометками концевых вершин, а также номерами областей Вороного, которые они разделяют. Обозначим множество вершин графа  $G(P)$  через  $V(P)$ .

Рассмотрим теперь множество конечных ребер диаграммы Вороного таких, что в графе  $G(P)$  вершины, инцидентные этим ребрам имеют степень 3. Тогда с каждой такой вершиной можно сопоставить тройку точек  $\tau$ , областям Вороного которых эта вершина принадлежит, а с ребром — объединение таких троек, сопоставленных его концевым вершинам. Из свойств диаграммы Вороного следует, что это объединение содержит ровно четыре точки.

Рассмотрим конфигурацию  $\pi = \{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \}$  и множество окружностей  $F$  на плоскости. Через  $\gamma(\pi)$  обозначим

$$\min_{l \in F} \max_{i=1,2,3,4} r_H(a_i, l),$$

а через  $\gamma(P) = \min \gamma(\pi_i)$ , где минимум берется по всем четверкам точек из  $P$ , которые соответствуют вышеупомянутым конечным ребрам. Если множество таких ребер пусто, то полагаем, что  $\gamma(P) = \infty$ .

Следующие два утверждения полностью описывают ситуацию исследования устойчивости в рассматриваемом случае.

**Утверждение 5.** Задача  $Z(P)$  является неустойчивой тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из двух условий:

1. Существует вершина  $v \in V(P)$  такая, что ее степень больше 3.
2. Множество  $J(P)$  не пусто.

Итак, если задача неустойчива, то  $r(P) = 0$ . Для устойчивой задачи следующее утверждение дает формулу вычисления радиуса устойчивости. Пусть  $l(P) = \min(\beta(P), \gamma(P), \delta(P))$ .

**Утверждение 6.** Если задача  $Z(P)$  устойчива, то  $r(P) = l(P)$ .

Рассмотрим теперь алгоритм вычисления радиуса устойчивости. Для нахождения  $\beta(P)$  и  $\delta(P)$  нужно решить одну и ту же задачу: для тройки точек  $\tau$  на плоскости найти минимальное расстояние от  $\tau$  до прямой, лежащей на плоскости. Известно, что минимум достигается на прямой, лежащей на одинаковом расстоянии от этих точек, поэтому одна из точек и оставшаяся пара лежат по разные стороны от прямой. Всего возможно три разных случая, и для рассмотрения каждого нужно решить систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Число вершин диаграммы не превосходит  $2n$ , а число неограниченных областей —  $n$ . Таким образом, для вычисления  $\min(\beta(P), \delta(P))$  требуется решить не более  $9n$  таких систем уравнений.

Так как число конечных ребер диаграммы не превосходит  $3n$ , то для нахождения  $\gamma(P)$  нужно не более  $3n$  раз решить следующую задачу. Для каждой четверки точек  $\pi$ , соответствующей конечному ребру диаграммы нужно найти минимальное чебышевское расстояние от этих точек до окружности (в евклидовской метрике), лежащей на плоскости. Опять минимум достигается на окружности, лежащей на одинаковом расстоянии от всех точек, и хотя бы по одной точке должно лежать внутри и вне этой окружности. То есть нужно решить не более 10 систем из трех уравнений с тремя неизвестными.

Отсюда следует, что  $\min(\beta(P), \gamma(P), \delta(P))$  может быть найден за время  $O(n)$ , причем, если этот минимум равен 0, то это означает, что задача неустойчива. Таким образом проверка устойчивости задачи и нахождение радиуса устойчивости могут быть осуществлены за линейное время.

## ЛИТЕРАТУРА

1. O'Dunlaing C., Yap C.K., A "retraction" method for planning the motion of the disc, *J. Algorithms*, 1985, vol. 6, p. 104–111.

2. Leven D., Sharir M., Planning a purely translational motion for convex object in two-dimensional space using generalized Voronoi diagrams, *Discrete Comput. Geom.*, 1987, vol.2., p. 9 – 31.
3. O'Dunlaing C., Sharir M., Yap C.K., Generalized Voronoi diagrams for a ladder: II. Efficient construction of the diagram, *Algorithmica*, 1987, vol. 2, p.27 – 59.
4. Schwartz J, Yap C.K., Advances in robotics, *Lawrence Erlbaum associates*, Hillside, NJ, 1986.
5. Emiris I., Canny J., An efficient approach to removing geometric degeneracies, *Proc. of the 8th Symp. on Comput. Geom.*, 1992, p. 74 – 82.
6. Burnikel K., Mehlhorn K., Schirra S. On degeneracy in geometric computations., *Proc. of the 5th ACM Symp. Discr. Opt.*, 1994, p.16 – 23.
7. Gordeev E.N. Algorithms of polynomial complexity for computing the radius of instability in two classes of trajectory problems, *U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys.*, 1987, v. 27, N 4.
- 8.Gordeev E.N. The stability of solutions in shortest path problem, *Discrete mathematics*, v.1, 1989, N3.
- 9.Leont'ev V.K. Stability in linear discrete problems, *Problems of cybernetics*, N35, Nauka, Moscow, 1979.
- 10.Gordeev E.N. On the stability of bottleneck problems, *Comput. Maths. Math. Phys.*, 1993, v. 33, N9.
- 11.Leont'ev V.K., Gordeev E.N. Qualitative investigations of trajectory problems, *Cybernetics*, Kiev, 1986, N 5.
- 12.Aurenhammer F., A survey of a fundamental geometric data structure., Preprint B 90 – 09, FU, Berlin, 1990.
- 13.Gordeev E.N. Voronoi diagram : a survey, *Pattern Recognition Theory*, vol. 4, 1991, p. 41 – 66.
- 14.Gordeev E.N., Tarasov S.P., Vyalyj M.N. On stability Voronoi diagram, *Comp. Maths. Math. Phys.* , 1996, v. 36, N 3.
- 15.Yap C.-K. Symbolic treatment of geometric degeneracies.— J. Symbolic Comp., 1990, v.10, 349 – 370.
- 16.Edelsbrunner H., Mücke E.P. Simulation of simplisity: a technique to copy with degenerate cases in geometric algorithms.— 4 – th ACM Symp. Comp. Geometry, p. 118 – 133.