

ISSN 0043 - 6917



**WISSENSCHAFTLICHE
ZEITSCHRIFT
DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ILMENAU**

Heft 2
1984

O. TARASZOW

Задача Штейнера на графах

1. Введение.

Многие народно-хозяйственные, технические и ряд других задач связаны с синтезом различных оптимальных структур взаимосвязанных элементов. К подобным задачам относятся, например, следующие задачи синтеза: сети передачи и обработки информации, сети управления, сети ЦВМ, телефонной сети, транспортной сети и т.д. Указанный класс задач адекватно описывается в терминах теории графов, как задача нахождения оптимального отображения $f: Q \rightarrow G$ между двумя графами (подробнее см. Taraszow,O., Iwainsky,A. /1/). В указанной постановке задачи граф Q описывает модель синтезируемого объекта, а граф G - модель "пространства", в которое необходимо оптимально в соответствие с критерием $I(f, Q, G)$ "погрузить" синтезируемый объект.

В специальном случае, когда граф Q синтезируемой структуры является деревом и выполнено условие $Q \subseteq G$ получаем задачу Штейнера на графах, решению которой и посвящена настоящая работа.

2. Постановка задачи Штейнера на графах.

Через $G = (Z, W)$ обозначим граф, где Z - множество вершин, W - множество ребер графа. Множества Z , W графа $G = (Z, W)$ будем обозначать также через $V(G)$, $E(G)$, соответственно. Для графа G задано разбиение его множества вершин: $Z = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$. Множество Y называют множеством точек Штейнера. Напомним, что связный граф D , не содержащий циклов, называется деревом. Для двух графов G_1 и G_2 по определению:

$$G_1 \subseteq G_2 \iff (V(G_1) \subseteq V(G_2)) \wedge (E(G_1) \subseteq E(G_2)).$$

Для связного графа G через $S(G)$ обозначим множество деревьев Штейнера, т.е.

$$S(G) \triangleq \{D \mid (D \text{ - дерево}) \wedge (D \subseteq G) \wedge (X \subseteq V(D))\} \quad (1)$$

Стоимость $I(D)$ дерева $D \in S(G)$ задается следующей формулой:

$$I(D) \triangleq \sum_{x \in V(D)} h(x) + \sum_{r \in E(D)} g(r) \quad (2)$$

где: $h: V(G) \rightarrow R$ - стоимость вершин G ,

$g: E(G) \rightarrow R$ - стоимость ребер G .

Задача. Для заданного конечного связного графа G найти такое минимальное дерево $D_x \in S(G)$ из множества (1) деревьев Штейнера, что для функционала (2) выполнено:

$$I(D_x) = \min_{D \in S(G)} I(D)$$

В настоящей работе рассматривается обобщенная задача Штейнера. Обобщения заключаются в следующем: 1) Исходный граф G может быть несвязным, т.е. в общем случае решение задачи - это минимальный лес Штейнера, каждая компонента связности которого является минимальным деревом Штейнера для соответствующей компоненты связности графа G . Следует подчеркнуть, что предложенный в работе алгоритм не нуждается в предварительном анализе графа G с целью выделения его компонент связности. Алгоритм дает решение независимо от связности или несвязности исходного графа G . 2) В критерий качества синтезируемой структуры - - функционал (2) входит также стоимость (3) вершин графа G .

В случае, если точки графа G находятся на плоскости, а в качестве стоимости (4) ребер графа берется евклидово или линейное (т.е. $d_{ij} = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$) расстояние, то получаем случаи задачи Штейнера на евклидовой плоскости или на прямоугольной сетке.

Задача Штейнера на евклидовой плоскости достаточно хорошо изучена и известно большое число общих свойств минимального дерева Штейнера. В частности, Garey, M.R., Graham, R.L., Johnson, D.S. /2/ доказали, что задача Штейнера на евклидовой плоскости является NP-полной. Известен ряд алгоритмов решения указанной задачи (см., например, Cockayne, E.J. /3/; Melzak, Z.A. /4/; Walther, H. /5/); в случае же задач большой размерности могут быть использованы и эвристические алгоритмы (см., например, Mc Gregor Smith, J., Lee, D.T., Liebman, J.S. /6/ ; Scott, A. /7/; Chang, S.-K. /8/).

Задача Штейнера на прямоугольной сетке также посвящена обширная литература. Garey, M.R., Johnson, D.S. /9/ доказали NP-полноту задачи. С обзором алгоритмов решения вышеуказанной задачи можно ознакомиться в работе Hwang, F.K. /10/. Сравнительный анализ ряда эвристических алгоритмов решения задачи Штейнера на прямоугольной сетке приведен в работе Servit, M. /11/.

Случай задачи Штейнера на графах, рассматриваемый в настоящей работе, в литературе мало изучен. Karp, R.M. /12/ доказал NP-полноту задачи.

Hakimi, S.L. /13/ изучена взаимосвязь задачи Штейнера на графах с рядом других задач теории графов, а также описан алгоритм построения дерева Штейнера с данной топологией. Dreyfus, S.E., Wagner, R.A. /14/ предложили алгоритм решения задачи Штейнера на графах, основанный на идее редукции исходной задачи. Алгоритм S.E.Dreyfus-R.A.Wagner требует следующее число операций:

$$O(\max(n^{3/2}, n^2 \cdot 2^{k-1}, n \cdot 3^{k-1})) \quad (5)$$

где $n=|V(G)|$, $k=|X|$. Алеја, У.Р. /15/ предложил без оценки необходимого числа операций алгоритм целочисленного программирования для решения задачи Штейнера на графах.

Отсутствие достаточно эффективных алгоритмов точного решения задачи Штейнера на графах приводит к естественной идее разработки эффективных эвристических алгоритмов.

3. Эвристический алгоритм решения задачи Штейнера на графах.

Предложенный далее эвристический алгоритм решения задачи Штейнера применим к любому конечному графу и представляет собой обобщение алгоритма Prim, R.C. /16/ для решения задачи нахождения минимального остовного дерева графа (т.е. частного случая задачи Штейнера, когда $X=V(G)$ и $Y=\emptyset$). Для задачи нахождения минимального остовного дерева предложенный нами эвристический алгоритм дает точное решение. Число операций эвристического алгоритма в худшем случае равно $O(n^3)$, а необходимая алгоритму память равна $O(n^2)$.

Введем необходимые обозначения и определения. Через $H_G(x, y)$ обозначим множество всех путей в графе G между вершинами $x, y \in V(G)$. $P_G(x, y) \in H_G(x, y)$ обозначает путь между вершинами x, y , $V(G)$, для которого выполнено:

$$I(P_G(x, y)) = \min_{P \in H_G(x, y)} I(P)$$

где $I(P)$ вычисляется по формуле (2).

Определим следующие множества:

$$\begin{aligned} K(G) &\triangleq \{P_G(x, y) \mid x, y \in V(G)\} \\ F(G, X) &\triangleq \{P_G(x, y) \in K(G) \mid x, y \in X\} \end{aligned} \quad (6)$$

Кроме того, $\forall Q \subseteq G$ обозначим:

$$\begin{aligned} A &\triangleq X \setminus (V(Q) \cap X) \\ C(Q, A) &\triangleq \{P_G(x, y) \in K(G) \mid (x \in V(Q)) \wedge (y \in A)\} \end{aligned} \quad (7)$$

Напомним, что для двух графов G_1 и G_2 граф $G_1 \cup G_2$ определяется следующим образом:

$$G_1 \cup G_2 \triangleq (V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2)).$$

Для подмножества $B \subseteq V(G)$ через E_G/B обозначим множество ребер графа G , инцидентных вершинам множества B . Для графов G_1, G_2 граф $G_1 \setminus G_2$ определяется следующим образом:

$$G_1 \setminus G_2 = (V(G_1) \setminus V(G_2), E(G_1) \setminus (E(G_2) \cup E_{G_1}/V(G_2)/))$$

Перейдем теперь к описанию эвристического алгоритма.

Начальный шаг: $i = 0$

$$D^0 = (\emptyset, \emptyset); A^0 = X; I(D^0) = 0; Q = G; M = X; i = i + 1$$

Шаг инициализации компоненты связности:

$$D^1 = D^{0-1} \cup P^X; A^1 = X \setminus (V(D^0) \cap X); I(D^1) = I(D^{0-1}) + \sum_{x \in V(P^X)} h(x) + \sum_{r \in E(P^X)} g(r),$$

где $P^X \in F(Q, M)$ и для P^X выполнено:

$$I(P^X) = \max_{P \in F(Q, M)} I(P) \quad (8)$$

$i = i + 1$

Шаг i :

Находим путь $t^X \in C(D^{i-1}, A^{i-1})$, для которого выполнено:

$$I(t^X) = \max_{t \in C(D^{i-1}, A^{i-1})} I(t) \quad (9)$$

Если $I(t^X) = \infty$, то $Q = G \setminus D^{i-1}$, $M = X \cap V(Q)$; переход к шагу инициализации компоненты связности, иначе:

$$D^i = D^{i-1} \cup t^X; A^i = A^{i-1} \setminus (V(t^X) \cap X); I(D^i) = I(D^{i-1}) + \sum_{x \in S^{i-1}} h(x) + \sum_{r \in R^{i-1}} g(r),$$

где $S^{i-1} = V(t^X) \setminus (V(t^X) \cap V(D^{i-1}))$; $R^{i-1} = E(t^X) \setminus (E(t^X) \cap E(D^{i-1}))$.

Проверка на окончание построения:

Если $A^i \neq \emptyset$, то $i = i + 1$ и переход к шагу i ; иначе $D^X = D^i$ и $I(D^X) = I(D^i)$. D^X – искомый лес Штейнера.

Теорема 1. Эвристический алгоритм построения минимального леса Штейнера корректен.

Схема док-ва: Корректность эвристического алгоритма означает, что получаемый в результате работы алгоритма граф является лесом Штейнера. Утверждение теоремы следует из следующих легко доказуемых фактов: 1) эвристический алгоритм конечен; 2) построенный алгоритмом график D^X содержит все вершины множества $X \subseteq V(G)$; 3) построенный график не содержит циклов, что следует из условий (8) – (9) выбора путей и определений (6) – (7) множеств $F(G, X)$, $C(Q, A)$; 4) числа компонент связности исходного графа G и построенного эвристическим алгоритмом леса D^X совпадают.

Укрупненная блок-схема эвристического алгоритма представлена на рис.1, где:

DIPER – пересчет данных об исходном графике из формы списковых структур в матричную форму.

- ALPATH - определение множества $K(G)$. В зависимости от заданного графа предусмотрено два варианта: 1) модификация алгоритма Floyd, R.W. /17/; 2) модификация алгоритма dijkstra, E.W./18/.
- NBAUM - реализация начального шага алгоритма.
- OPWEG - определение пути $P^* \in F(Q, M)$.
- COWEG - определение пути $t^* \in C(D^{i-1}, A^{i-1})$.
- KORBA - расширение леса Штейнера на основе найденных P^* или t^* (т.е. шаг инициализации новой компоненты связности или шаг i).
- KOEND - проверка на окончание построения.
- UNPER - подготовка информации к печати.
- COGRAF - корректировка графа для инициализации новой компоненты связности.

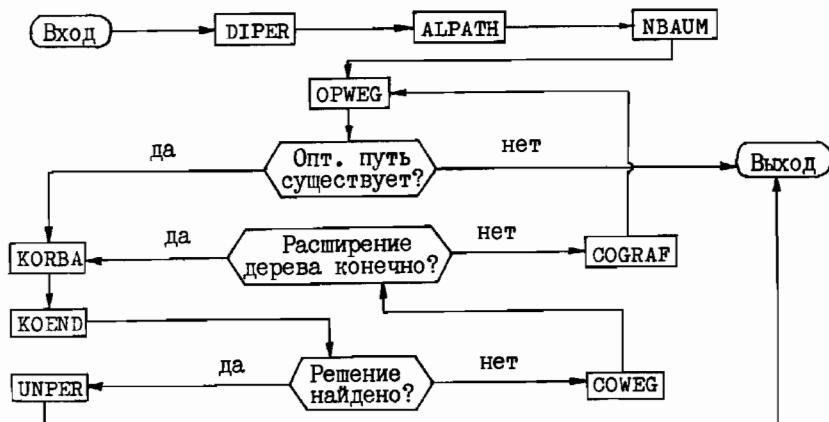


Рис. 1. Укрупненная блок-схема эвристического алгоритма решения задачи Штейнера.

Заметим, что максимальное число операций $O(n^3)$ требует подпрограмма ALPATH определения множества $K(G)$ всех оптимальных путей графа G .

С описанием указанного пакета программ можно ознакомиться в работе Böring, S., Iwainsky, A., Schiemangk, Ch., Taraszow, O./19/.

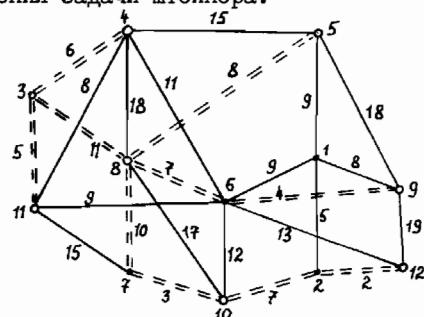


Рис. 2. Пример эвристического решения задачи Штейнера.

На рис.2 приведен пример эвристического решения задачи Штейнера. Для рассматриваемого графа вершины множества X обозначены "○", а точки Штейнера - символом "•". Вершины графа пронумерованы. Номера вершин одновременно обозначают и стоимости вершин. Стоимость ребер графа указана на рисунке. Ребра решения задачи - дерева Штейнера - помечены символом "===== . . . =". Время решения указанного примера составило 0,30 сек БЭСМ - 6.

4. Алгоритм точного решения задачи Штейнера на графах.

Излагаемый далее алгоритм решения задачи Штейнера на графах применим к любому конечному графу и существенно использует ранее описанный эвристический алгоритм.

Введем необходимые обозначения. Через 2^Y обозначим множество всех подмножеств множества Y . Для подмножества $A \subseteq V(G)$ через G/A обозначим максимальный по числу ребер подграф графа G (т.е. $G/A \subseteq G$) такой, что: $V(G/A) = A$.

Перейдем теперь к описанию алгоритма точного решения задачи Штейнера на графах.

Шаг инициализации:

Получение начального решения D^* с помощью эвристического алгоритма.

$$D_0 = D^*; \quad I(D_0) = I(D^*); \quad \tilde{Z} = 2^Y.$$

Проверка на окончание:

Если $Z = \emptyset$, то D_0 - решение задачи Штейнера, иначе:

Очередной шаг:

1) Выбор подмножества $A \in \tilde{Z}$ точек Штейнера.

$$L = X \cup A; \quad \tilde{Z} = \tilde{Z} \setminus A.$$

2) Формирование графа G/L .

3) Нахождение минимального оствовного леса $D(L)$ графа G/L с помощью модифицированного эвристического алгоритма. Модификация эвристического алгоритма заключается в следующем:

- модифицированный алгоритм не содержит подпрограммы ALPATH определения множества $K(G/L)$ всех оптимальных путей графа G/L , т.к. множество $K(G)$ уже было определено на шаге инициализации. Соответствующее множество $K(G/L) \subseteq K(G)$ оптимальных путей графа G/L легко строится из множества $K(G)$ при формировании графа G/L .
- пусть r обозначает для некоторого этапа работы алгоритма построенную часть минимального оствовного леса графа G/L . В процессе работы модифицированного эвристического алгоритма TREE(L)

для каждой построенной части леса $D \subseteq G/L$ осуществляется проверка: если $I(D) > I(D_0)$, то переход к шагу "проверка на окончание".

Заметим, что в силу вышеуказанного, число операций модифицированного эвристического алгоритма TREE(L) в худшем случае равно $O(n^2)$.

Обновление решения:

Если $I(D(L)) < I(D_0)$, то $D_0 = D(L)$, $I(D_0) = I(D(L))$; иначе: переход к шагу "проверка на окончание".

Теорема 2. Алгоритм точного решения задачи Штейнера на графах корректен.

Схема док-ва: Теорема 2 следует из факта, что минимальный лес Штейнера однозначно определяется некоторым подмножеством $A \in 2^Y$ точек Штейнера Y , а изложенный алгоритм точного решения исследует все элементы множества 2^Y .

Укрупненная блок-схема алгоритма точного решения задачи Штейнера на графах представлена на рис.3.

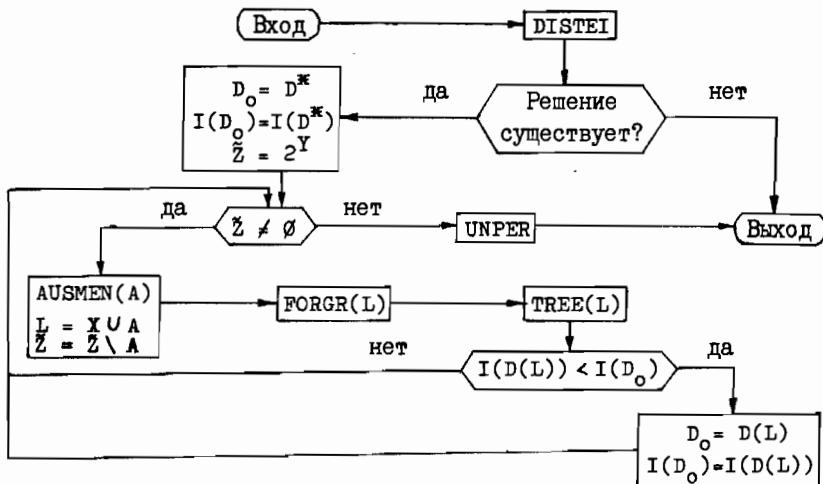


Рис. 3. Укрупненная блок-схема алгоритма точного решения задачи Штейнера.

Ранее не описанные блоки выполняют следующие функции:

- DISTEI - эвристический алгоритм решения задачи Штейнера на графах
- AUSMEN(A) - выбор некоторого элемента $A \in \tilde{Z}$.
- FORGR(L) - формирование графа G/L .
- TREE(L) - модификация эвристического алгоритма DISTEI для точного решения задачи построения минимального оставшегося леса графа G/L .

Последовательный перебор всех подмножеств множества 2^Y может быть осуществлен при помощи двоичного представления чисел $1, 2, \dots, |2^Y|$ или с помощью любого алгоритма построения кодов Грея (см., например, Bitner, J.R., Ehrlich, G., Reingold, E.M. /20/).

Укрупненная блок-схема алгоритма TREE(L) представлена на рис.4.

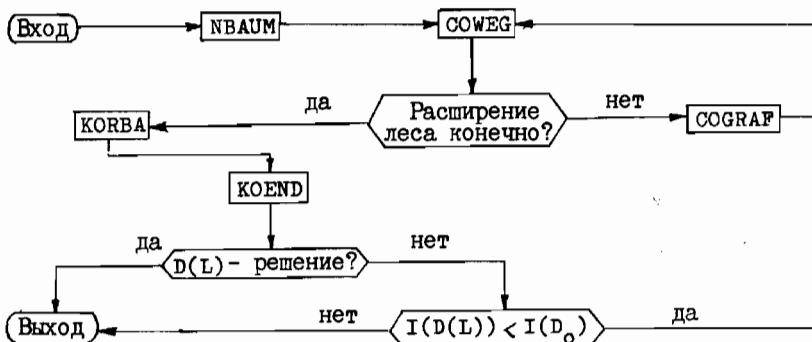


Рис. 4. Укрупненная блок-схема алгоритма TREE(L).

Из анализа блок-схем рис. 3-4 следует, что число операций алгоритма точного решения задачи Штейнера на графах в худшем случае не превосходит

$$O(\max\{n^3, n^2 \cdot 2^{n-k}\}) \quad (10)$$

Вышеописанному алгоритму требуется память в размере $O(n^2)$.

Анализ формул (5), (10) показывает, что методы работы Dreyfus, S.E., Wagner, R.A. /14/ и методы настоящей работы хорошо дополняют друг друга, а именно: алгоритм S.E.Dreyfus - R.A.Wagner требует меньшего числа операций в случае небольших значений $|X|$, алгоритм же настоящей работы требует меньшего числа операций в случае больших значений $|X|$. Аналитическое сравнение эффективности с экспоненциальным алгоритмом Алея, У.Р. /15/ невозможно, т.к. в названной работе не приведена оценка числа операций предложенного там алгоритма.

5. Некоторые смежные задачи.

Перечислим некоторые задачи, решаемые с помощью программных средств, содержащихся в ранее описанных алгоритмах решения задачи Штейнера:

- 1) Построение леса Штейнера для графа G за $O(\max\{n^3, n^2 \cdot 2^{n-k}\})$ операций.

Замечание. Кроме стоимости ребер допускается и ненулевая стоимость вершин графа. Ребра, вершины графа могут иметь отрицательные стоимости. Граф не содержит циклов суммарной отрицательной стоимости.

- 2) Эвристическое решение задачи Штейнера на графах за $O(n^3)$ операций

- 3) Построение минимального остворного леса графа G за $O(n^3)$ операций.

На рис.5 для графа рис.2 указано минимальное остворное дерево. Время решения указанной задачи составило 0,32 сек БЭСМ - 6.

- 4) Нахождение оптимальной звездной структуры графа G ($1 - \text{median problem}$) за $O(n^3)$ операций, т.е. нахождение $z_k \in V$ (где $V \subseteq V(G)$, $V(G) = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$) такого, что:

$$l(z_k) + \sum_{x \in X} I(P_G(z_k, x)) = \min_{z \in V} (l(z) + \sum_{x \in X} I(P_G(z, x)))$$

1: $V \rightarrow R$,

где $l(z)$ - стоимость месторасположения центра звездной структуры в вершине $z \in V$.

На рис.6 для графа рис.2 указана оптимальная звездная структура, причем для этого примера выполнено: $V = V(G)$; стоимости месторасположений центра звезды в соответствующих вершинах графа помечены символом " \oplus ".

Время решения задачи составило 0,24 сек БЭСМ - 6.

- 5) Построение множества $\{P_G(x, y) | y \in V(G)\}$ оптимальных путей графа G от фиксированной вершины $x \in V(G)$ за $O(n^2)$ операций.
- 6) Построение множества $\{P_G(x, y) | x, y \in V(G)\}$ всех оптимальных путей

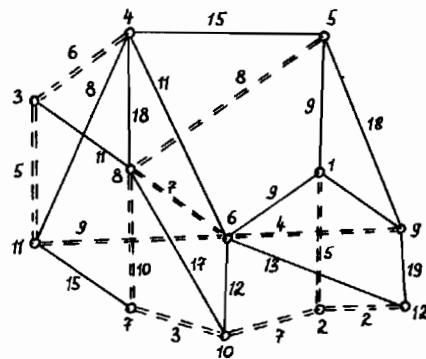


Рис. 5. Пример построения минимального дерева графа.

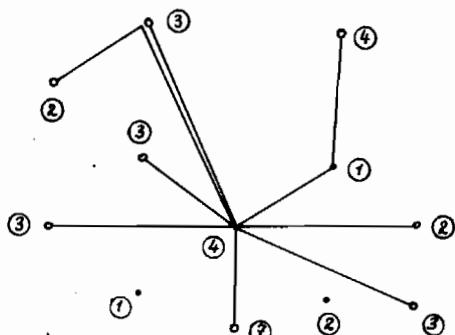


Рис. 6. Пример построения минимальной звезды графа.

графа G.

- 7) ∀ $B \subseteq V(G)$ построение оптимального пути $P_G(a_{\#}, b_{\#})$ между множествами B и $V(G) \setminus B$ за $O(n^3)$ операций, т.е. нахождение пути $P_G(a_{\#}, b_{\#})$, где $a_{\#} \in B$, $b_{\#} \in V(G) \setminus B$ такого, что выполнено:

$$I(P_G(a_{\#}, b_{\#})) = \min_{\substack{a \in B \\ b \in V(G) \setminus B}} I(P_G(a, b))$$

Литература

- /1/ Tarassow,O., Iwainsky,A.(1981) Trassierung und Plazierung auf Graphenmodellen. ZfR-Informationen, 16, 215-231.
- /2/ Garey,M.R., Graham,R.L., Johnson,D.S.(1977) The complexity of computing Steiner minimal trees. J.SIAM Appl.Math.32,4,835-859.
- /3/ Cockayne,E.J.(1970) On the efficiency of algorithm for Steiner minimal trees. J. SIAM Appl. Math. 18, 1, 150-159.
- /4/ Melzak,Z.A.(1961) On the problem of Steiner. Canad. Math. Bull., 4, 143-148.
- /5/ Walther,H.(1979) Anwendung der Graphentheorie. DVW, Berlin.
- /6/ Mc Gregor Smith,J., Lee,D.T., Liebman,J.S.(1981) On $O(n \log n)$ heuristic for Steiner minimal tree problem on the euclidian metric. Networks 11, 23-29.
- /7/ Scott,A.(1971) Combinatorial programming, spatial analysis and planning. Methuen, London.
- /8/ Chang,S.-K.(1972) The generation of minimal trees with a Steiner topology. J. ACM 19, 4, 699-711.
- /9/ Garey,M.R., Johnson,D.S.(1977) The rectilinear Steiner tree problem is NP-complete. J.SIAM Appl.Math. 32, 4, 826-834.
- /10/ Hwang,F.K.(1978) The rectilinear Steiner problem. Des.Automat. Fault Tolerant Comput., 3, 303-310.
- /11/ Servit,M.(1981) Heuristic algorithms for rectilinear Steiner trees. J. Digit. Process. 7, 1-32.
- /12/ Karp,R.M.(1972) Reducibility among combinatorial problems. Complexity of Computer Computations, Miller,R.E., Thatcher,J.W., eds., Plenum Press, New York, 85-104.
- /13/ Hakimi,S.L.(1971) Steiner's problem in graphs and its implications. Networks 1, 113-133.

- /14/ Dreyfus,S.E., Wagner,R.A.(1972) The Steiner problem in graphs. Networks 1, 195-207.
- /15/ Aneja,Y.P.(1980) An integer linear programming approach to the Steiner problem in graphs. Networks 10, 167-178.
- /16/ Prim,R.C.(1957) Shortest connection networks and some generalizations. Bell Syst. Tech. J. 36, 1389-1401.
- /17/ Floyd,R.W.(1962) Algorithm 97 - shortest path. Comm. ACM, 5,345.
- /18/ Dijkstra,E.W.(1959) A note on two problems in connection with graphs. Num. Math., 1, 269-271.
- /19/ Döring,S., Iwainsky,A., Schiemangk,Ch., Taraszow,O. (1981) Strukturoptimierung von Automatisierungsanlagen. ZKI - Internbericht, Berlin.
- /20/ Bitner,J.R., Ehrlich,G., Reingold,E.M. (1976) Efficient generation of the binary reflected Gray code and its applications. Comm. ACM, 19, 517-521.

Verfasser:

Dipl.-Math. Oleg Taraszow, wiss. Mitarbeiter
im Zentralinstitut für Kybernetik
und Informationsprozesse der AdW

1086 Berlin
Kurstraße 33

Eingang des Manuskripts: 7. Juni 1983