Дискретная математика

том 5 выпуск 2 * 1993

УДК 519.854

ЗАДАЧА ШТЕЙНЕРА. ОБЗОР

Э.Н. Гордеев, О.Г. Тарасцов

Задача Штейнера последнее десятилетие привлекает большое внимание исследователей в области дискретной оптимизации. В работе дан краткий обзор основных результатов, касающихся свойств и алгоритмов решения задачи Штейнера на евклидовской плоскости, задачи Штейнера на плоскости с прямоугольной метрикой и задачи Штейнера на графах, причем в последней основное внимание уделено результатам, полученным после 1985 года. Рассматриваются как точные, так и эвристические алгоритмы, их эффективность и результаты численных экспериментов. Приведены примеры вероятностных подходов к решению задачи. Последний параграф работы посвящен гипотезе Джилберта–Поллака.

§ 1. Введение

В настоящее время различные постановки задачи Штейнера (ЗШ) изучаются в таких областях как дискретная оптимизация, вычислительная геометрия, проблемы трассировки при проектировании СБИС,коммуникационных сетей, механических и электрических систем и т.д. При этом публикации в этой области можно разделить на две группы. В первом случае речь идет о классической ЗШ, ее частных случаях или обобщениях, и основное внимание уделяется изучению свойств этой задачи и построению алгоритмов ее решения. Вторая группа включает в себя публикации, посвященные либо задачам, постановка которых лишь "отдаленно" связана с классической и, по сути дела, отдается дань лишь термину "задача Штейнера", либо сугубо прикладным задачам, возникшим в связи с попыткой использования алгоритмов решения тех или иных постановок задачи Штейнера, в которых основное внимание уделяется не самой задаче, а особенностям реализации этих алгоритмов в конкретных прикладных аспектах.

Следует отметить две основные причины, которые инспирировали настоящую работу. Среди задач дискретной оптимизации в 80-е годы именно ЗШ посвящено наибольшее количество исследований и достигнут определенный прогресс в сфере возможностей ее решения, что во многом обуславливается важностью ее приложений. В то же время у нас эта проблематика является сравнительно малоизвестной.

К настоящему времени существует два обзора, посвященных задаче Штейнера на графах (ЗШГ): обзор Макулана [105] и обзор Винтера [161]. Краткий обзор эвристик в задаче Штейнера с прямоугольной метрикой (ЗШПМ) приведен во введении работы Ричардс [120], обзор некоторых результатов дан в [11]. Поэтому

в данной работе мы основное внимание уделим ЗШ на плоскости, а для ЗШГ приведем перечень основных результатов, подробнее остановившись на публикациях последних лет, не вошедших в упомянутые обзоры. В то же время, учитывая малодоступность этих обзоров, мы попытаемся дать связную картину имеющихся к настоящему моменту результатов в этой области.

Под задачей Штейнера на евклидовой плоскости (ЗШПЕ) понимается проблема нахождения на плоскости с евклидовой метрикой кратчайшего дерева, связывающего n заданных точек плоскости (терминалов) $A_1, \ldots, A_n$. Но в отличие от известной задачи о кратчайшей связывающей сети на графе в ЗШ допускается введение при необходимости новых вершин дерева, отличных от терминальных. Эти вершины называются точками Штейнера (ТШ). Полученное в результате решение является деревом и называется минимальным деревом Штейнера (МДШ). При этом деревом Штейнера (ДШ) называется любое дерево, покрывающее множество терминалов и, быть может, некоторые ТШ.

ЗШ является, по-видимому, старейшей оптимизационной проблемой математики. Ее постановка для случая $n = 3$ принадлежит Ферма [55], а первое решение для этого случая получено Кавальери и Торричелли [139]. В начале прошлого века Штейнер также сформулировал аналогичную задачу, и, вероятно, поэтому с легкой руки Куранта и Роббинса, которые в своей известной книге [36], вышедшей в 1941 г., привели формулировку задачи и некоторые ее свойства для общего случая, имя Штейнера и было дано этой задаче. Однако, еще раньше Джарник и Косслер в [85] в 1934 г. сформулировали задачу для общего случая и доказали ряд ее свойств.

Популярное изложение ЗШ и ряда связанных с ней проблем можно найти в работе Берна и Грэхэма [11]. История ее возникновения приведена в работах [11], [98].

В случае замены евклидовой метрики на прямоугольную (l_1, манхэттеновскую) получаем ЗШПМ. В этом случае ДШ покрывает терминалы, используя только вертикальные и горизонтальные отрезки на плоскости, и расстояние между двумя точками с координатами (x_i, y_i), (x_j, y_j) равно $|x_i - x_j| + |y_i - y_j|$. Вновь, естественно, допускаются ТШ и требуется найти МДШ. Выделение этого случая и особое к нему внимание объясняется во многом прикладными аспектами, например, использованием в задачах трассировки.

Ограничение на число точек Штейнера и возможности локализации всех точек задачи приводит к третьей, наиболее часто исследуемой, постановке: задаче Штейнера на графах. Пусть дан граф $G = (V, E)$, где множество вершин V состоит из непересекающихся множеств, множества терминалов A и множества точек Штейнера S. Всюду в дальнейшем будем считать, что $|V| = p = n + s$, $|A| = n$, $|S| = s$, $|E| = m$. Ребрам графа приписаны неотрицательные веса, а под длиной дерева понимается сумма весов входящих в это дерево ребер. Задача состоит в нахождении такого подграфа G, который является деревом, покрывающим все терминальные вершины, и имеет минимальную длину среди всех подобных подграфов. Этот подграф вновь называется МДШ.

Перечисленные три постановки задачи будем называть основными в отличие от ряда других, которые, как правило, являются либо частными случаями, либо обобщениями этих постановок.

Структура работы следующая. Во втором параграфе рассматриваются вопросы сложности задачи Штейнера в различных постановках. Третий параграф посвящен ЗШЕ, четвертый – ЗШПМ, пятый – ЗШГ.

ЗШ инспирировала вопрос о соотношении длин МДШ и минимального остовного дерева, который нашел свое отражение в недавно решенной гипотезе Джильберта–Поллака, выдвинутой в 1968 году. Этому вопросу и ряду менее известных комбинаторных свойств задачи посвящен последний параграф.

§ 2. Вычислительная сложность задачи Штейнера в различных постановках

Для всех основных постановок ЗШ к настоящему времени не построены полиномиальные алгоритмы решения.

NP-полнота ЗШГ была доказана Карпом путем сведения к ней задачи о покрытии. Этот результат приведен среди самых первых доказательств *NP*-полноты в задачах оптимизации.

При $s = 0$ ЗШГ эквивалентна задаче о минимальном остовном дереве, для которой существуют хорошо известные полиномиальные алгоритмы (например, алгоритм Краскала [96], предложенный в 1956 г., сложности $O(n^2)$, Прима [114] (1957, $O(m \log n)$)), а к настоящему времени и ряд более эффективных процедур решения.

При $n = 2$ ЗШГ эквивалентна задаче о кратчайшем пути между фиксированной парой вершин графа, для которой также существуют полиномиальные алгоритмы решения, например, алгоритм Дейкстры (1959, $O(n^2)$).

Однако, ЗШГ остается полиномиально полной в следующих случаях: веса всех ребер единичны; граф планарен; граф является двудольным и его долями являются множества A и S.

Однако полиномиальная разрешимость установлена для ряда частных случаев, которых мы еще коснемся в пятом параграфе. Здесь же заметим следующее. Для класса параллельно-последовательных графов (без подграфов, гомеоморфных K_4) существует линейный алгоритм решения ЗШГ. Ричи и Паркер [122] рассматривают следующую с виду очень близкую задачу (используя при этом и термин ЗШ). Пусть в G фиксированы подмножества вершин $S_1, \ldots, S_K$. Спрашивается, существует ли разбиение множества ребер графа на K попарно непересекающихся подмножеств $E_1, \ldots, E_K$ таких, что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant K$, множество E_i образует связный подграф, покрывающий все вершины из S_i. Эта задача называется задачей о подграфе Штейнера, ее *NP*-полнота доказана даже для случая последовательно-параллельных графов. Этот результат является косвенной характеристикой как сложности ЗШГ, так и класса рассматриваемых графов.

Другие результаты, касающиеся сложности частных случаев ЗШГ, рассматриваются в [109], [110].

Интересный в прикладном аспекте частный случай ЗШГ возникает в связи с теорией эволюции. Здесь возникает специальный класс деревьев, описывающих наследственность, которые строятся путем проверки различий в кодах ДНК. Связанная с ними задача Штейнера изучается в [59]. Ее точная постановка состоит в следующем. Для множества слов длины N в фиксированном алфавите T за расстояние берется метрика Хемминга, и рассматривается ЗШ в полученном метрическом пространстве: для заданного $X \subseteq T^N$ найти МДШ. Доказано, что данная задача *NP*-полна даже в случае двухэлементного алфавита (для доказательства к ней сводится известная задача о 3-покрытии).

NP-полнота ЗШПМ была доказана в [63] путем использования в сведении задачи о вершинном покрытии планарного графа.

В [64] доказана *NP*-полнота ЗШЕ путем сведения к некоторому варианту этой задачи известной *NP*-полной задачи о 3-покрытии.

Полиномиально разрешимые случаи во всех трех основных постановках будут рассмотрены ниже.

§ 3. Задача Штейнера на евклидовской плоскости

Формулировка задачи приведена во введении. Первый метод ее решения для $n = 3$ дан в [39]. Курант и Робинс [36] наряду с формулировкой задачи для произвольного n привели два важных свойства: в МДШ число ТШ не превышает $n - 2$; степень ТШ равна 3 и инцидентные ей ребра образуют друг с другом углы 120°. Однако этих свойств не достаточно для непосредственного построения конечной процедуры поиска МДШ, так как для любой пары точек (D, B) множество точек плоскости P таких, что угол DPB равен 120°, бесконечно.

Впервые конечная процедура построения МДШ была предложена Мелзаком [108] в 1961 г. Ключевым здесь является подмеченный им факт о том, что если две точки D и B соединены ребрами с точкой Штейнера P, то третье ребро, инцидентное P, проходит через вершину C, которая образует равносторонний треугольник с вершинами D и B и лежит в разных с точкой P полуплоскостях, образованных прямой, проходящей через D и B. Таким образом, если МДШ с n вершинами таково, что две его вершины D и B непосредственно соединены ребрами с ТШ, то заменой пары D и B на C осуществляется редукция к задаче Штейнера с $n - 1$ вершинами. Так как существует два способа выбора точки C и $n(n - 1)/2$ способов выбора пары D, B, то отсюда с учетом того факта, что число ТШ не превосходит $n - 2$, и получается конечная процедура поиска МДШ. Дерево Штейнера с $n - 2$ точками Штейнера называется *полным* (ПДШ). Остается заметить, что если МДШ не является ПДШ, то существует его декомпозиция на ПДШ меньшей размерности. Таким образом, непосредственное использование перечисленных фактов приводит к получению экспоненциального алгоритма построения МДШ.

Дальнейшие исследования по построению точных алгоритмов решения задачи проведены Кокинэ [29–34].

Доказательство основного результата Мелзака [108] содержит ошибки, в этой работе нет описания и алгоритма решения. Кокинэ [29] приводит корректное доказательство, исследует свойства МДШ как в случае евклидовой плоскости, так и в некоторых других пространствах. На базе этих исследований описывается алгоритм решения задачи, более совершенный по сравнению с непосредственной реализацией идей Мелзака в [108].

В частности, дерево U является МДШ тогда и только тогда, когда оно обладает следующими пятью свойствами.

1. Вершинами дерева U являются точки $A_1, \dots, A_n$ и $s_1, \dots, s_k$.

2. Ребра дерева U пересекаются только в вершинах.

3. Вершины s_i, $i = 1, \dots, k$, являются точками Штейнера и лежат в треугольниках, образованных терминалами.

4. Степени точек Штейнера равны 3, а степени терминальных точек не превосходят 3.

5. Число точек Штейнера не превосходит $n - 2$.

Некоторые элементарные свойства МДШ, алгоритм решения ЗШ для $n = 3$ и

некоторых специальных конфигураций из n точек приведены в работе Кельманса [88].

Из перечисленных свойств МДШ, в частности, следует, что никакие два ребра МДШ не образуют угла меньше 120°, а ребра, инцидентные ТШ образуют углы 120°. Этот факт послужил одним из аргументов исследований, проведенных в работе [80], где обсуждается ЗШ в гексагональной системе координат.

ПДШ – это ДШ, удовлетворяющее первым четырем из вышеприведенных свойств. Описание структуры минимальных ПДШ (МПДШ) и метод их перечисления являются основой алгоритма Кокинэ из [29].

Для случая, когда терминалы являются вершинами выпуклого многоугольника, в [31] приведен алгоритм решения задачи и результаты численных экспериментов с FORTRAN-программой.

Пусть W – некоторое подмножество терминалов, содержащее m вершин. ПДШ, покрывающее W, содержит $m-2$ ТШ. Полной топологией (ПТ) множества W называется матрица смежности или любое эквивалентное представление, описывающее дерево на m терминалах и $m-2$ точках Штейнера. Заметим, что ПТ не описывает локализацию ТШ.

После упомянутых публикаций Мелзака и Кокинэ следующим значительным вкладом в исследование ЗШ является работа Джильберта и Поллака [66]. Доказано, что если ПДШ для данной ПТ существует, то оно единственно. Таким образом, трудоемкость переборного алгоритма определяется числом ПТ. Пусть $f(s)$ – число ПТ ровно с s ТШ, а $F(n, s)$ – число ПТ для n терминалов и s ТШ. В работе получены соотношения

$$f(s) = 2^{-s}(2s)!/s!; \qquad F(n,s)=2^{-s}(s+2)(n+s-2)!/s!.$$

Общее же число полных топологий равно

$$\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{m=0}^{[(n-k-2)/2]}\binom{n}{m}\binom{n-m}{k+m+2}f(k+m)\frac{(n+k-2)!\,(m+k)!}{(2k+2m+1)!}.$$

Здесь подробно обсуждается проблема редукции задачи большей размерности к задачам меньшей. Приведены семь свойств, на базе которых подобная редукция может быть осуществлена. Кроме того, в этой работе впервые высказана, стоявшая открытой до 1990 года, гипотеза о соотношении длин МДШ и кратчайшего остовного дерева (КОД). Здесь же приведено обсуждение этой гипотезы и связанных с ней вопросов.

Следующий шаг в направлении построения точного алгоритма решения задачи был предпринят Кокинэ в 1970 [32]. Здесь сделана попытка улучшения предыдущего алгоритма путем использования редукционных процедур, в частности, идей из работы [66]. В результате описан алгоритм, применимый к решению ЗШ с $n \leqslant 30$,причем вначале осуществляется редукция исходной задачи к задачам с 6 и менее терминалами.

На основе этого алгоритма автор совместно с Шиллером в [33] описывает программу решения ЗШ, в процессе работы которой генерируются все полные топологии для каждого $W \subseteq A$ и строятся соответствующие им ПДШ, если таковые существуют. Затем находится МПДШ и осуществляется на основе их объединения построение МДШ для заданного множества терминалов. Однако уже для сравнительно малых размерностей за счет экспоненциального роста памяти, необходимой для хранения найденных к некоторому моменту МПДШ, возникают проблемы с памятью и в результате некорректности борьбы с этой трудностью многие подмножества терминалов рассматриваются неоднократно.

Бойс [16], продолжая эти исследования, рассматривает проблему алгоритмической проверки существования МПДШ для данного множества терминалов. Особое внимание уделяется изучению ситуации, когда минимальное ПДШ не является МДШ. Автор приводит модификацию программы Кокинэ, имеющую бóльшие вычислительные возможности. Численные эксперименты приведены для $n \leqslant 10$. В [17] приведена дальнейшая модификация алгоритма, способная решать задачи с $n = 12$.

Винтер в 1981 анонсировал новую программу GEOSTEINER точного решения задачи, которая решала задачи с числом терминалов $n \leqslant 15$. Эта программа, представленная в [157], использует ряд топологических редукционных результатов предшествующих исследователей, но на их основе предложена сложная конструкция, использующая более тонкие методы и процедуры. В результате более эффективным образом решается вопрос существования и оптимальности ПДШ для данной ПТ, и вышеупомянутые проблемы с памятью наступают при более высоких размерностях. Приведены численные эксперименты для n, $3 \leqslant n \leqslant 15$, 25, (UNIVAC–1100). Время вычисления при $n \leqslant 20$ не превосходило 30 сек.

Кокинэ и Хэвгил предложили [34] дальнейшее улучшение этого алгоритма за счет присоединения к нему на первом этапе редукционной процедуры. И в результате около 70% решаемых задач с 30 точками сводились к задачам с 17 и менее точками, к которым затем применялась программа GEOSTEINER. Общее время решения не превосходило 200 сек.

Таким образом, в основе перечисленных алгоритмов лежат два основных направления исследований: процедуры перебора ПДШ и редукционные методы. Поэтому ряд публикаций посвящен непосредственно редукционным процедурам. К настоящему времени, по сути дела, разработаны три основных метода декомпозиции ЗШ. Первый метод изложен еще в работе Джилберта и Поллака [66]. Его суть в следующем. Пусть две линии пересекаются под углом 60° и все терминалы лежат внутри двух вертикальных углов, равных 60°, тогда МДШ представляет собой соединенные кратчайшим ребром МДШ для точек внутри каждого из этих углов.

Второй метод декомпозиции предложен Кокинэ [32]. Пусть P_1 – выпуклый многоугольник, образованный границей выпуклой оболочки терминальных вершин, и тройка вершин (p, q, r) удовлетворяет следующим свойствам: $p, q \in P_1$; $\angle\, pqr \geqslant 120°$; r либо лежит внутри P_1, либо $r \in P_1$; внутри треугольника pqr нет терминалов. Пусть P_2 – многоугольник (многоугольник Штейнера), полученный удалением тройки p, q, r из P_1 и построенный на оставшихся точках аналогично P_1. Этот процесс продолжается пока такие тройки вершин существуют. Последний многоугольник, полученный в результате этого процесса, называется оболочкой Штейнера. Если для некоторого P_i точка $r \in P_i$ и $f_1, \ldots, f_m$, f_1 – упорядоченная последовательность терминалов на P_i, где $f_i = p$, $f_{i+1} = q$, $f_j = r$ $(i + 1 < j)$, то обозначим через F_1 множество терминалов внутри выпуклой оболочки точек $f_1, \ldots, f_i, f_j \ldots, f_m, f_1$, а через F_2 множество терминалов внутри выпуклой оболочки точек $f_1, \ldots, f_{j-1}, f_j$. Тогда МДШ на $F_1 \cup F_2$ является объединением МДШ на F_1 и МДШ на F_2.

Третья процедура декомпозиции описана в работе [81]. Пусть $P(x_1, \ldots, x_m)$ –

многоугольник с упорядоченной последовательностью вершин $x_1, \ldots, x_m$, $P(A)$ – многоугольник Штейнера, четыре вершины которого a, b, c, d таковы, что $P(a, b, c, d)$ – выпуклый четырехугольник: $\angle a \geqslant 120°$; $\angle b \geqslant 120°$; $\angle boa \geqslant \geqslant \angle a + \angle b - 150°$, где o – точка пересечения диагоналей. Обозначим через F_1 (F_2) множество терминалов, лежащих внутри области, ограниченной $P(A)$ и отрезком $[a, b]$ ($[c, d]$), но вне $P(a, b, c, d)$. Тогда МДШ на $F_1 \cup F_2$ является объединением МДШ на F_1 и МДШ на F_2. Этот результат представляет собой обобщение предыдущего, если вместо треугольника "удаляется" четырехугольник. Однако, если два предшествующих результата уже использовались в алгоритмах решения ЗШ, то последний еще нет. Поэтому о вычислительном эффекте его применения ничего сказать нельзя, хотя косвенные соображения, приведенные авторами, свидетельствуют об эффективности.

Генерация ДШ является предметом работы [79]. Подход, предложенный в работе, является обобщением процедуры Мелзака. Предлагается более тонкая процедура упорядочения ДШ при их перечислении.

Перейдем теперь к эвристическим алгоритмам, которым посвящены работы [20], [88], [90], [132].

Кельманс в [88] описывает простой очевидный локальный алгоритм построения приближенного решения задачи путем последовательного добавления терминалов к уже обработанным и перестройки полученного на предыдущем шаге решения.

В алгоритме Корхонена [90] КОД трансформируется в ДШ. Чанг [20] разработал итеративную процедуру, которая при применении ее к КОД строит некоторое дерево со специальными свойствами. Однако результатом работы алгоритма не всегда является ДШ. Численные эксперименты проводились для $n \leqslant 100$.

Одна из наиболее эффективных эвристических процедур предложена в [132]. Ее трудоемкость $O(n \log n)$. Здесь вначале строится триангуляция Делоне множества терминалов и внутри каждого треугольника строится ДШ, которые затем с использованием свойств диаграммы Вороного и минимального остовного дерева связываются в некоторое ДШ. Вычислительный эксперимент проведен для $n \leqslant 50$ (времена решения задач не превосходят 1.5 сек.).Отношение длины полученного решения к длине КОД не хуже, чем у предыдущего алгоритма сложности $O(n^4)$. Аналогичный подход использован авторами и для решения задачи на поверхности сферы [169].

После доказательства NP-полноты ЗШЕ начались исследования ее полиномиально разрешимых частных случаев.

В [65] предложен метод сложности $O(n^2)$ для решения ЗШ, в которой допускается только одна ТШ. Основой алгоритма является метод разбиения плоскости на $O(n^2)$ областей обладающих тем свойством, что при добавлении ТШ в каждую из этих областей, результирующее МДШ имеет фиксированную топологию. Затем в каждой из этих областей с трудоемкостью порядка $O(1)$ ищется "наилучшее" расположение ТШ.

Прован [116] исследует ЗШ с дополнительным условием выпуклости, т.е. терминалы лежат на границе выпуклой области. В общем случае для ЗШЕ не существует полностью полиномиальной приближенной схемы (ППС) (т.е. алгоритма, который для любой индивидуальной задачи 1 и любого $\varepsilon > 0$ находил бы за полиномиальное от n и $1/\varepsilon$ время ДШ, отношение длины которого к длине МДШ не

превосходит $1 + \varepsilon$) при условии, что $P \neq NP$. Прован же для рассматриваемого случая построил в данной работе ППС, трудоемкость которой $O(n^6 / \varepsilon^4)$.

Пусть R – связная замкнутая область плоскости, граница которой образована конечным числом отрезков. Алгоритм решения ЗШЕ для терминалов внутри такой области строится в [117]. В работе обобщается предыдущий результат из [116] за счет использования, в частности, вышеприведенных методов декомпозиции.

Три простых частных случая задачи рассматриваются в [43], [45], [88]. Здесь приведены аналитические формулы для длины МДШ.

Так в [45] терминалы расположены на окружности, в [43] они являются точками излома регулярного зигзага, последовательность соседних участков (отрезков) которого пересекаются под одинаковыми углами.

Как уже говорилось во введении, определенное число работ посвящено задачам, в названии которых фигурирует термин "задача Штейнера". В качестве примеров можно привести следующие публикации.

Трич [142], [143] рассматривает две задачи, которые он называет обобщениями ЗШ. В первой задаче [143], требуется связать N графов на плоскости совокупностью ребер минимальной суммарной длины, при этом концевые точки этих ребер могут лежать как на вершинах исходных графов, так и на их ребрах. Допускаются также ТШ. Автор предлагает конечную процедуру решения, аналогичную процедуре Кокинэ [33] для ЗШЕ. В [142] рассматривается такой случай этой задачи, когда каждый граф, кроме одного, состоит из единственной вершины. В [30] рассматривается аналог ЗШ, в которой терминалами являются многоугольники специального вида. В [104] рассматривается ЗШ с двумя критериями.

Обзоры сфер приложения ЗШ в технике, проектировании СБИС и т.д. можно найти в [92], [102], [104].

§ 4. Задача Штейнера на плоскости с прямоугольной метрикой

В случае замены в предыдущей постановке евклидовской метрики на прямоугольную (l_1, манхэттеновскую) получаем ЗШПМ. В этом случае ДШ покрывает терминалы, используя только вертикальные и горизонтальные отрезки на плоскости, и расстояние между двумя точками с координатами (x_i, y_i) и (x_j, y_j) равно $|x_i - x_j| + |y_i - y_j|$. Вновь, естественно, допускаются ТШ и требуется найти МДШ.

Многочисленным приложениям этой задачи посвящены, в частности, публикации [70], [73], [74], [92], [100].

В следующем параграфе будет обсуждаться ЗШ на графах. В первой же публикации Ханана [71], посвященной ЗШПМ доказано, что ЗШПМ является частным случаем ЗШГ. Пусть дано два множества действительных чисел $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Вершинами графа-решетки $G = (V, E)$ являются точки плоскости, первая координата которых принадлежит X, а вторая – Y, ребра соединяют две вершины (x_i, y_j) и (x_k, y_l) тогда и только тогда, когда

$$|i - k| + |j - l| = 1.$$

Упорядоченные наборы первых и вторых координат терминальных вершин образуют множества X и Y, граф-решетка на которых обозначается через $G(A)$. Ханан доказал, что МДШ в ЗШМП является подграфом $G(A)$. Таким образом, все результаты, относящиеся к задаче Штейнера на графах, применимы и к рассматриваемой

постановке. Однако, как в силу "исторических" причин, так и с точки зрения особенностей, связанных с приложениями, данная задача традиционно выделяется в отдельную задачу.

Данная задача, как показали Гэри и Джонсон [63], является NP-полной. Практически все посвященные этой задаче публикации рассматривают либо эвристические методы, либо полиномиально разрешимые частные случаи. Точные же методы ее решения в общем случае, не играющие в прикладном плане никакой роли исследуются в общей проблематике ЗШГ. Краткий обзор эвристик приведен во введении к работе [120], а также в работе Винтера [161], рассматривающего данную задачу как частный случай ЗШГ.

Свойства задачи, структура МДШ и теоретические основы алгоритмов ее решения изучались, в частности, в [25], [54], [63], [71], [72], [73], [75], [76], [106]. Точные методы ее решения предложены в [71], [166].

Для случая произвольного n существует, по сути дела, единственный точный специально посвященный ЗШПМ алгоритм Янга и Винга [166] на базе метода ветвей и границ, но и он по эффективности, как мы увидим ниже, значительно уступает точным алгоритмам решения ЗШГ, и практически применим лишь для $n \leqslant 10$. Прерывание по времени такого алгоритма позволяет на основе полученных оценок величины оптимума и имеющегося к данному времени "рекорда" получить приближенное решение. Такие решения, как указано в статье, строились для размерностей $n \leqslant 30$.

Результат Хванга [75] (если для множества терминалов A не существует МДШ, в котором степень терминалов больше единицы, то существует решение задачи, имеющее одну из двух фиксированных описанных в работе топологий), характеризующий МДШ для одного класса ЗШПМ, может быть использован при построении алгоритмов решения ЗШ. Простое доказательство этой теоремы приведено в недавней работе [174].

В вышеупомянутой работе [71] Ханан формулирует и доказывает для этой задачи выполнение свойств 1–5 (см. предыдущий параграф), аналогичных вышеприведенным для ЗШЕ, кроме того для $n = 3, 4, 5$ подробно исследуется метод точного решения. Предлагается также эвристический алгоритм сложности $O(n^2)$. (О нем речь идет и в работе [73].) Эта первая по времени эвристика для данной задачи является обобщением алгоритма Прима. При этом решение строится путем последовательного добавления очередного терминала A_k к дереву, построенному на предыдущих $k-1$ терминалах (вначале все они упорядочиваются по возрастанию координаты x). Присоединение осуществляется вдоль кратчайшего пути от терминала до имеющегося фрагмента, а среди всех таких кратчайших путей берется путь с наибольшим вкладом горизонтали $x = x_k$. Мы подробно остановились на этом методе потому, что именно его модификация, разработанная в [120], легла в основу наилучшей к настоящему времени эвристики для ЗШПМ. Улучшение алгоритма происходит на стадии соединения терминала и построенного фрагмента путем просмотра некоторого множества дополнительных вариантов. Оценка трудоемкости алгоритма в худшем случае остается прежней, однако, доказано, что сложность в среднем равна $O(n^{3/2})$, а применение современных методов вычислительной геометрии позволяет построить его модификацию сложности $O(n \log n)$. Численные эксперименты проводились для $n \leqslant 10\,000$ и проведенное автором сравнительное с другими эвристиками исследование показало значительное превосходство метода (см. таблицу 1).

Таблица 1

Ссылка	Авторы	Год	Время, сек.	Размер задачи	Процент α
166	Янг, Винг	1972	185	35	11
129	Смит, Либман	1979	34	40	7
130	Смит, Ли, Либман	1980	1	40	8
101	Ли, Бозе, Хванг	1976	5	35	9
77	Хванг	1979	–	–	9
8	Берн, Карвальо	1985	1	40	9
120	Ханан, Ричардс	1989	56	10000	4

Фу [62] предлагает эвристику, на каждом шаге которой из построенного на начальном этапе КОД для всего множества точек удаляются пути, содержащие только ТШ степени 2 (если таковые имеются), а полученные фрагменты вновь соединяются специальным образом. Автор высказывает гипотезу об оптимальности полученного решения, которая опровергается Хананом в [72].

Эвристика Смита и Либмана [129] имеет сложность $O(n^4)$. Здесь авторы предлагают три способа выбора подмножеств точек – кандидатов в ТШ. Размер такого подмножества – $O(n^2)$. А затем на этих точках и терминалах строится КОД.

Предварительная декомпозиция задачи с использованием алгоритма построения триангуляции Делоне с последующей итеративной процедурой улучшения решения – основа эвристики, предложенной [130], сложность которой $O(n \log n)$.

В [101] рассматривается специальный случай ЗШПМ и для него строится эвристика сложности $O(n^2)$, которая затем сравнивается с точным алгоритмом Янга и Винга [167] на примерах сетей с n = 5–35. Данная эвристика применима и к общей ЗШПМ. Ее модификацию сложности $O(n \log n)$ предложил Хванг [77]. Однако уменьшение трудоемкости происходит не за счет выигрыша на различии этапов декомпозиции и сращивания фрагментов решения, а за счет использования того факта, что Шеймос и Хо в 1975 году построили алгоритм нахождения диаграммы Вороного на евклидовой плоскости сложности $O(n \log n)$, а из этого немедленно следует возможность построения с той же трудоемкостью КОД для точек евклидовой плоскости. Хванг же в [78] аналогичный результат получил для прямоугольной метрики и теперь в алгоритме из [101] в качестве подпрограммы построения КОД уже можно использовать метод сложности $O(n \log n)$, что и дает выигрыш.

Берн и Карвальо [8] предложили эвристику сложности $O(pn^2)$, в которой они обобщили подход трудоемкости $O(pn^2 \log n)$, предложенный Томсоном на базе алгоритма Краскала [96].

Для сравнения качества алгоритмов принято использовать выраженное в процентах отношение $\alpha = (L' - L)/L$, где L – длина МДШ, а L' – длина ДШ, полученного в результате работы эвристики. В таблице 1 из [120] сравниваются семь эвристик.

Любопытной с точки зрения приложений является работа [126], в которой автор на большом количестве примеров реальных задач трассировки сравнивает набор из 8 эвристических алгоритмов. Такой эксперимент значительно более естествен и информативен, нежели примеры для случайных наборов точек. Краткое резюме этого исследования. Рассматриваются: HAN1,HAN2 (алгоритмы Ханана

сложности $O(n^2)$ из работы [79]), SRV1, SRV2 (непосредственные упрощения двух предыдущих алгоритмов сложности $O(n \log n)$, где вместо кратчайшего пути от терминала до фрагмента ищется кратчайший путь от терминала до пути, построенного на предыдущем шаге), RECT (линейный алгоритм, где основой является вычисление полупериметра наименьшего прямоугольника, включающего терминалы), AVBR (квадратичный алгоритм, основанный на непосредственной оценке длины КОД в прямоугольной метрике) и два последних квадратичных алгоритма – PRIM (алгоритм Прима) и непосредственное его обобщение – STAN. Для сравнения берутся два критерия: время решения и качество полученного решения. По обоим критериям AVBR проявил себя хуже SRV1; PRIM и STAN хуже, чем HAN2; SRV2 хуже алгоритма HAN1. Если в качестве критерия брать время решения, то оставшиеся алгоритмы можно упорядочить по возрастанию времени решения следующим образом: RECT, SRV1, HAN1, HAN2. Заметим, что алгоритмы располагаются в том же порядке и по мере улучшения качества полученного решения.

В [92] приведен обзор методов решения ЗШПМ с точки зрения приложения к задачам проектирования СБИС.

Вероятностный подход к задаче обсуждается Комлошем и Чингом в [89]. В алгоритмах n терминалов с координатами, равномерно распределенными на единичном отрезке, разбиваются на группы, для каждой из которых строится МДШ и полученные таким образом фрагменты объединяются в некоторое ДШ. Для двух различных методов разбиения (алгоритмов) результатами являются два дерева T_1 и T_2, длины которых L_1 и L_2. Основываясь на вероятностном подходе, который Карп разработал для задачи коммивояжера на евклидовой плоскости, авторы доказали две теоремы, оценивающие L_1 и L_2.

Теперь перейдем к полиномиально разрешимым частным случаям ЗШПМ. В уже упоминавшейся работе [116] Прован дает определение прямоугольной выпуклости и рассматривает специальный случай задачи, когда терминальные вершины лежат на границе выпуклой (в данной метрике) области. Для этой задачи строится точный алгоритм решения сложности $O(n^6)$. Аналогичный подход и результат получены и для ЗШГ.

ЗШПМ для специальных конструкций рассматривается Чангом и Грэхэмом в [23]. Получены точные формулы для L как функции от n.

Подграф $G(A)$ называется прямоугольным деревом (ПД), если он может быть получен в результате следующей рекурсивной процедуры. Прямой угол (связный граф, ребра которого лежат на сторонах прямого угла) является ПД. К имеющемуся ПД можно добавить прямой угол путем идентификации ребра этого угла с одним из ребер ПД, лежащим на внешней грани так, чтобы не образовалось вершины степени 4. Минимальное по расстоянию ПД – это такое ПД, расстояния между любой парой вершин которого в самом ПД и в $G(A)$ одинаковы. В работе получено описание всех возможных классов таких ПД. Основным результатом работы [54] является доказательство того факта, что существование минимального по расстоянию ПД, покрывающего все терминалы, влечет за собой существование минимального ПД такой же длины. Отсюда при выполнении условия теоремы получается линейный алгоритм решения ЗШПМ. Заметим, что, по сути дела, этот факт впервые анонсирован Винтером в [161].

В [2] рассматриваются два частных случая задачи, в которых терминалы лежат на параллельных прямых и на границе прямоугольника. Для первого случая получен линейный, а для второго кубический алгоритм решения. Линейный алго-

ритм для второго случая построен в [35], где доказано, что МДШ в этом случае обязательно имеет одну из фиксированных десяти топологий, построение же МДШ в каждой из этих топологий осуществляется за линейное время. Аналогичный результат получен в [1].

Трубин в [141] рассмотрел подкласс ЗШ на плоскости со специального вида метрикой, для которого построил полиномиальный алгоритм решения.

§ 5. Задача Штейнера на графах

Во введении уже приводилась формулировка этой задачи. Пусть дан граф $G = (V, E)$, где множество вершин V состоит из двух непересекающихся множеств, множества терминалов A и множества точек Штейнера S. Всюду в дальнейшем будем считать, что $|V| = p = n + s$, $|A| = n$, $|S| = s$, $|E| = m$. Ребрам графа приписаны неотрицательные веса, а под длиной дерева понимается сумма весов входящих в это дерево ребер. Задача состоит в нахождении такого подграфа G, который является деревом, покрывающим все терминальные вершины, и имеет минимальную длину среди всех подобных подграфов. Этот подграф вновь называется МДШ.

Основное внимание в этом параграфе мы уделим результатам, полученным после 1985 года, однако для полноты изложения мы очень коротко постараемся дать представление о ситуации в целом, сложившейся к настоящему моменту. Подробное изложение, содержащее детальное описание алгоритмов, можно найти в обзоре Винтера [161] и монографии Фосса [146].

Хакими [69] впервые сформулировал задачу и предложил топологический метод ее решения по аналогии с методом Мелзака для ЗШЕ. Начиная с A и перебирая все возможные множества ТШ, он строит для полученных индуцированных подграфов КОД, опираясь в этом переборе на процедуру Кевина и Уитни. Сложность алгоритма $O(n^2 2^s + (n+s)^3)$. Однако автор утверждает, что его метод имеет сложность $O(p^4)$ при условии $s \leqslant 2\log(n + s)$.

Следующий переборный алгоритм на базе динамического программирования предложил Левин [102]. Хотя временные оценки отсутствуют, однако легко показать, что данный алгоритм имеет трудоемкость $O(3^n(n+s) + 2^n(n+s)\log(n+s) + m)$.

Алгоритмы Дрейфуса и Вагнера [41], Берна [13], Лоулера [99], Эриксона и др. [53] также основаны на методе динамического программирования. В первом из них осуществляется последовательная декомпозиция задачи к задачам уменьшающейся размерности, которые решаются с помощью матрицы кратчайших путей между парами вершин графа. Трудоемкость этого алгоритма $O((n+s)3^n + (n+s)^2 2^n + (n+s)^3)$. Сложность алгоритма Лоулера $O(2^s n^2 + (n+s)^2 \log(n+s) + m)$.

В [53] предлагается метод динамического программирования для более общей задачи нахождения потока минимальной стоимости в сети с дополнительными ограничениями. Применение этого алгоритма для решения ЗШ на планарных графах, в которых все терминалы лежат на одной грани, приводит к построению полиномиального алгоритма сложности $O(pn^3 + n^2 p \log p)$. Если же число граней, на которых лежат терминалы, равно f, то сложность алгоритма есть $O(pn^{3f} + s^{2f} p \log p)$.

Таблица 2

n	s	Среднее время (сек.)			Диапазон (сек.)		
		Дрейфус, Вагнер	Хакими	Шор и др.	Дрейфус, Вагнер	Хакими	Шор и др.
10	3	<1	5	3			1–4
10	5	9	1	2	9–10		1–3
10	8	*	<1	1			1–2
20	5	36	*	25	35–36		16–36
20	10	*	88	21		82–95	12–29
20	15	*	3	22			9–51
30	5	45	*	*	45–46		72–100
30	15	*	*	90			56–100
30	25	*	6	80		6–7	53–48

Следует отметить, что Прован в [116] независимо построил полиномиальный алгоритм для случая, когда $f = 1$.

Берн [13] улучшил результат работы [53], построив алгоритм сложности $O(pn^{2f+1} + n^{2f} p \log p)$. Кроме того, он привел другую оценку сложности алгоритма из [53]. Пусть граф может быть расположен на плоскости так, что w терминалов лежит на границе бесконечной грани, тогда указанный алгоритм имеет трудоемкость

$$O(pw^3 3^{n-w} + w^2 2^{n-w} p \log p).$$

Отсюда, в частности, следует полиномиальный (порядка $O(w^3 n^2 3^{n-w})$) алгоритм решения ЗШПМ для данного случая. Это является улучшением результата Прована [116].

Следующий подход к точному решению ЗШГ предложил Анейя [3]. Он сформулировал ее как задачу о вершинном покрытии графа, которую решал затем методом отсечений с применением двойственного симплекс алгоритма и использованием нескольких эвристических процедур.

Фоулдс и Гиббонс [57] предложили метод типа ветвей и границ, применимый, как показали эксперименты, лишь для малых размерностей, в котором наряду с процедурой порождения деревьев использовалась для отсечения слабая нижняя оценка длины МДШ.

Метод Шора и др. [128] также основан на использовании техники ветвей границ и целочисленного программирования. Здесь для отсечений использовалась серия оценок, позволяющих определить, может ли построенный для данной ветви фрагмент быть частью МДШ.

Итог первого десятилетия работы в этой области в какой-то степени подведен в [58], где авторы запрограммировали на АЛГОЛе и на одной и той же ЭВМ провели сравнение наиболее известных к тому моменту алгоритмов. Выяснилось, что алгоритм Левина [102] полностью мажорируется, например, алгоритмом Дрейфуса и Вагнера [41]. Остальные результаты приведены в таблице 2, при этом * означает, что время счета превосходило 100 секунд.

Для сравнения заметим, что Анейя [3] решает задачи с $n \leqslant 50$, $s \leqslant 20$, $m \leqslant 60$ в пределах 40 секунд, однако при $n = 50$ ему удается решить лишь 40% задач.

Алгоритм Янга и Винга [165] аналогичен алгоритму работы [128], однако, менее эффективен.

Бисли [6], [7] предлагает три алгоритма точного решения ЗШГ, которая рассматривается как задача булева программирования, решаемая методом релаксации Лагранжа. Например, в первом алгоритме [6] используется задача о кратчайшем пути и градиентный метод для максимизации полученной на основе лагранжевой релаксации этой задачи нижней оценки длины МДШ. В других алгоритмах используют более тонкие методы для получения нижних оценок. Так в третьем алгоритме [7] ЗШГ формулируется как задача о кратчайшем остовном дереве с дополнительными ограничениями, которые и дают вклад в слагаемые функции Лагранжа при получении нижней оценки. Кроме того, в предложенных алгоритмах используется семь различных процедур редукции задачи большей размерности к задачам с меньшим числом ребер и вершин. Полученные алгоритмы являются наилучшими к настоящему времени. Как показали численные эксперименты с ФОРТРАН программой на Cray X–MP/42, удается решить задачи с $n \leqslant 1250$, $p \leqslant 2500$, $m \leqslant 62500$.

Аналогичный подход рассматривается в [163], [115], однако для вычисления нижних оценок используются другие процедуры. Вонг рассматривает ЗШ на орграфе, в которой требуется найти минимальное дерево, связывающее корневую вершину со всеми терминалами. Численные эксперименты проводились для $n \leqslant 60$ и $m \leqslant 240$.

Лин [103] исследует метод получения нижней оценки МДШ для ЗШ на ориентированных графах. Он дает ее оригинальную формулировку как задачи целочисленного линейного программирования. Для многогранника этой задачи получено описание новых классов фасет, за счет которых и получается новая нижняя оценка. В качестве подпрограммы используется алгоритм Вонга [163]. Для отсечений используется также набор эвристических процедур улучшения рекорда. Численные эксперименты с программой (на языке C) проводились с задачами, в которых $p = 100$, $n = 40$. Время решения порядка 200 сек.

В [110] рассматривались ЗШ на орграфах без ориентированных циклов, но с узлом, из которого достижимы все остальные вершины. Вновь задача рассматривалась как задача линейного булева программирования и программа на CDC–6600 показала эффективность алгоритма при $n \leqslant 100$, $p \leqslant 320$.

Но если в предыдущих подходах основной упор делался на получение нижних оценок, в частности, на метод лагранжевой релаксации, то другое достаточно развитое в настоящее время направление занимается в основном разработками редукционных процедур. Алгоритмы, полученные в этом пути, более просты в реализации, однако позволяют решать задачи достаточно большой размерности. К этому направлению можно отнести работы [82], [5], [50], [51]. В первой из них предложена редукционная процедура на базе эвристически получаемых верхних оценок длины МДШ. Эта процедура обобщается затем на случай ЗШГ, в которой веса ребер зависят от степеней вершин.

В [5] рассматриваются некоторые качественные характеристики оптимального решения задачи, на основе проверки которых и предлагаются затем редукционные процедуры. Комбинируя эти методы с алгоритмом Краскала, авторы предлагают алгоритм решения и доказывают его асимптотическую оптимальность при некоторых вероятностных предположениях. Однако численные эксперименты проводились на графах с малым числом вершин (до 40) и ребер (до 60).

В [50], [52] разработаны новые методы редукции с использованием решения вспомогательных задач на узкие места, которые позволяют как удалять ребра и вершины графа, которые не могут входить в МДШ, так и определять наиболее

вероятных кандидатов на включение в оптимальные решения. Проводились многочисленные эксперименты с ПАСКАЛЬ-программами для задач с $p \leqslant 200$, $s \leqslant 100$, $m \leqslant 4950$. При этом варьировалась плотность графов, рассматривались как задачи на плоскости, так и задачи, генерируемые случайным образом. В среднем исходные задачи "быстро" сводились к задачам по крайней мере вчетверо меньшей размерности.

В [124] предложен оригинальный аналоговый алгоритм решения задачи на основе термодинамической модели.

Перейдем теперь к эвристическим алгоритмам. Вначале заметим, что многие вышеприведенные точные методы, прерванные на некотором шаге, могут использоваться как приближенные алгоритмы. Например, Анейя [3] и Вонг [163] строят на основе своих точных алгоритмов эвристики.

Все множество существующих к настоящему времени эвристик можно условно разбить на следующие группы.

Эвристики на основе задачи о кратчайшем пути. Первый такой алгоритм сложности $O(np^2)$ предложен Тахакаши и Мацуямой [138]. Он является комбинацией алгоритма поиска кратчайшего пути и алгоритма Прима. Качество эвристики $\beta = L'/L \leqslant 2(1-1/n)$, причем оценка эта достижима. В [127] предложена модификация этого метода.

Эвристики на основе графа расстояний разработаны независимо в [93], [112] и [52]. Общая схема их такова. Вначале ищутся кратчайшие пути между всеми парами терминалов, затем строится КОД на полном графе, вершинами которого являются терминалы, а длинами ребер – найденные длины кратчайших путей. Сложность алгоритма $O(np^2)$ (вариант этого алгоритма, приведенный в [91], имеет сложность $O(n(p \log p + m))$), а $\beta \leqslant 2(1 - 1/l)$, где число l – число листьев в МДШ.

Плесник [112], Сулливан [136] предлагают модификацию этого метода, в которой кратчайшие пути вычисляются не только для терминалов, но и для q точек Штейнера. В результате сложность алгоритма возрастает до $O(s^q n^2 + p^3)$, а $\beta \leqslant$ $\leqslant 2 - q/(n-2)$.

В [156] применяется тот же подход, что и в [93], однако вместо алгоритма Прима используют метод Краскала из [96] и несколько иной синтез обеих этапов, получая тем самым алгоритм сложности $O(m \log p)$. Это более эффективно для разреженных графов, большинство вершин которых – точки Штейнера.

Используя более совершенную структуру данных, Видмайейр [156] предлагает дальнейшее улучшение этого метода. Сложность эвристики $O(m + \log p(p +$ $+ \min(m, n^2)))$. При этом в наихудшем случае вновь $\beta = 2(1 - 1/l)$. Дальнейшее улучшение предложено Мелхорном [107], где сложность понижена до $O(m + p \log p)$. Качество алгоритма то же, однако он не только быстрее, но и значительно проще, так как автор для достижения этого качества ограничивается более простыми методами вычисления как кратчайших путей, так и КОД.

В [97] предлагают вероятностный подход к исследованию ЗШГ. Для случайных графов с заданными вероятностями появления ребер предлагается метод вычисления нижней оценки длины МДШ, которая "почти всегда" равна длине МДШ. Для вычисления этой оценки используются два различных полиномиальных алгоритма, один из которых предложен в [93].

Эвристика Коу и Макки [94] также принадлежит к этой группе и является дальнейшим развитием предыдущих. Ее качество то же, что и в предыдущих

случаях, а сложность равна $O(m + n \log n + t \log\beta (t, s))$, где $t = \min (m, s(s - 1)/2)$, $\beta (t, s) = \min\{i: \log^{(i)} t \leqslant t/s\}$.

Третья группа эвристик – эвристики средних расстояний. Примером является алгоритм Райварда–Смита [118]. Для случаев $n = p$ и $n = 2$ этот алгоритм дает точные решения. На каждой его итерации просматривается список возможных фрагментов решения, который вначале состоит из изолированных вершин, а затем с помощью специальной функции для вычисления расстояний от узлов до фрагментов выбираются два фрагмента списка и соединяются кратчайшим путем, образуя новый фрагмент, таким образом за $n - 1$ итерацию строится некоторое ДШ. Время работы $O(p^3)$. Эксперименты показали качественную работу этого алгоритма как для ЗШГ, так и для ЗШПМ. Исследуя этот алгоритм Ваксман [152] доказал, что в наихудшем случае его решение вдвое превосходит оптимальное и эта оценка достижима.

К четвертому классу эвристик можно отнести алгоритм Ванга [151] (эвристика кратчайших путей со многими источниками), который с одной стороны использует аналогичную предыдущему процедуру последовательного соединения фрагментов, однако делает это более простым способом, а с другой, так же как во второй группе эвристик использует матрицу кратчайших путей, но при этом хранит и анализирует большее число возможных решений. Сложность метода в худшем случае и его качество то же, что и у алгоритма из [93], однако сложность в среднем есть $O(p^2 \log n)$.

Детально на обширном материале Райвард–Смит и Клэр в [119] провели сравнение трех групп эвристик на примере алгоритмов работ [93], [138] и [118]. Результаты достаточно естественны, например, последняя дает наилучший по качеству результат, но работает дольше всех и т.д.

Полиномиально разрешимые частные случаи рассматривались в работах [4], [10], [19], [37], [38], [115], [116], [121], [147], [148], [154], [155], [160].

Случай последовательно-параллельных графов рассматривался в § 2. Линейные алгоритмы решения ЗШ для этого случая описаны в [115], а также в [148]. Авторы работы [148] в [147] построили линейный алгоритм решения задачи для плоских графов, все вершины которых лежат на внешней грани (внешнепланарные графы). Этот класс является подклассом предыдущего.

Для графов, которые получены замыканием в цикл листьев некоторого дерева (графы Хэлена) линейный алгоритм решения описан в [160]. Выше уже упоминались полиномиальные алгоритмы Берна [10], [13] и Прована [116] для графов, все терминалы которых принадлежат фиксированному числу граней. Прован [173] дает обзор роли некоторых конструкций в алгоритмах решения задач Штейнера на плоскости и на графах.

Для графов, любой цикл которых из четырех и более ребер содержит хорду, а любой цикл с четным числом ребер, большим шести, делится хордой на два цикла с нечетными числами ребер в [154], [155] предложен кубический алгоритм решения ЗШ в случае единичных весов ребер. Те же ограничения на веса рассматриваются в [37], однако на структуру графа накладывается ограничение, связанное со свойством "гомогенности". (Множество из двух или более вершин называется гомогенным, если любая из остальных вершин либо не связана ни с одной вершиной данного множества, либо связана со всеми.) Описан полиномиальный алгоритм распознавания принадлежности графа к рассматриваемому классу и полиномиальный алгоритм решения ЗШ для этого класса графов.

Д'Атри и Москарини предлагают в [38] алгоритм сложности $O(mp)$ для решения ЗШ на графе с единичными весами ребер, в котором любой цикл на пяти и более вершинах имеет по крайней мере две хорды вида (u, υ) и (w, z), где u, υ, w, z – вершины этого цикла, которые проходятся в указанном порядке.

Для случая, когда веса ребер принимают только одно из двух значений (1 или 2), Берн и Плассман [12] построили приближенный алгоритм с $\beta = 4/3$.

Большое число работ (см., например, [49], [95], [125], [142], [143], [153], [158], [159]) посвящено обобщениям ЗШГ, однако здесь та же ситуация, что и в случае задачи на плоскости, поэтому мы не будем подробно останавливаться на этих обобщениях, а приведем лишь ссылки и несколько примеров.

Естественным обобщением задачи является переход к ориентированному графу (выше об этом уже шла речь). Упомянем еще работу [172], в которой предлагается эвристический алгоритм решения задачи, использующий идеи из [6–7] и [5]. Кроме того, для получения верхней оценки строятся k наилучших остовных дерева. Вычислительный эксперимент проводился для $n \leqslant 300$.

Крауп [95] рассматривает следующее обобщение задачи. Пусть матрица $R = (r_{ij})$ порядка $n \times n$ задает локальную связность терминалов. Ищется такой минимальный по длине подграф исходного графа, в котором пара терминалов i и j является r_{ij}-связной. Рассматривая частные случаи этой задачи при условии 2-связности Винтер построил линейные алгоритмы решения задачи [158] (внешнепланарные графы), [159] (последовательно параллельные), [161] (графы Хэлена).

Следующее обобщение – вершинно взвешенная ЗШГ, в которой веса приписаны и вершинам и ребрам, а вес ДШ равен сумме весов его ребер и вершин. Сегев [125] исследует специальный случай этой задачи, когда $n = 1$ и веса всех ТШ отрицательны. Доказана NP-полнота этой задачи, предложен алгоритм нахождения нижней оценки длины МДШ и эвристика для решения задачи. Дуин и Волгенант [49] по аналогии с вышеописанными алгоритмами [50], [51] разработали редукционную процедуру для решения задачи в общем случае. Они также показали, что данная задача является специальным случаем ЗШ на орграфе, и рассмотрели еще одно обобщение – задачу построения леса Штейнера, в которой для заданного s требуется найти подграф минимального веса, состоящий не более, чем из s компонент, каждая из которых содержит по крайней мере один терминал. Эти же авторы в [170] рассмотрели ЗШ с двумя весами на ребрах и предложили два эвристических алгоритма с использованием редукционных процедур для ее решения. Сложность обоих алгоритмов $O(np^2)$.

§ 6. Гипотеза Джилберта–Поллака и некоторые качественные свойства задачи Штейнера

В [66] Джилберт и Поллак сформулировали гипотезу о соотношении длин МДШ и кратчайшего остовного дерева для задачи Штейнера на евклидовой плоскости. Пусть $L_{st}(A)$ длина минимального дерева Штейнера на множестве терминалов A, а $L_{mt}(A)$ – длина кратчайшего остовного дерева, построенного на этих же точках плоскости. Через ρ_n обозначается нижняя грань отношения $L_{st}(A) / L_{mt}(A)$ по всем выборам из n точек плоскости. Гипотеза для случая евклидовой плоскости заключается в утверждении о том, что $\rho_n = \sqrt{3}/2$. В этой

же работе справедливость гипотезы была доказана для случая $n = 3$. Кроме того, с использованием результата Моора, доказано, что $\rho_n \geqslant 1/2$, а также тот факт, что $L_{st}(A)/L_{mt}(A) = \sqrt{3}/2$ в случае, когда терминалы являются вершинами равностороннего треугольника.

Поллак [113] исследовал ряд свойств МДШ и подтвердил гипотезу для $n = 4$, пользуясь утверждением о том, что МДШ имеет в этом случае одну из пяти фиксированных топологий, для каждой из которых гипотеза выполняется. Другое очень короткое доказательство (для $n = 4$) получено в [44]. Его основой послужило утверждение о том, что всегда существует остовное дерево длины L такое, что $L_{st}(A)/L \leqslant \sqrt{3}/2$. В своей следующей работе [46] авторы, используя тот же подход, доказали справедливость гипотезы для $n = 5$.

Рубинштейн и Томас [175] сформулировали гипотезу как вариационную задачу, в которой возмущается $2n$-мерный вектор координат терминалов в R^{2n}. Этот подход послужил основой интересного и оригинального доказательства справедливости гипотезы для $n = 3, 4, 5$, а в [176] с использованием той же техники авторы подтвердили гипотезу для $n = 6$.

Калман [86] для произвольного n доказал, что длина любого ДШ лишь с одной ТШ не меньше $(\sqrt{3}/2)/L_{mt}(A)$. Для произвольного метрического пространства в [66] была получено оценка $L_{st}(A)/L_{mt}(A) \geqslant 1/2$. Для пространства произвольной размерности с евклидовой метрикой Грэхэм и Хванг [86] показали, что для всех n выполняется неравенство $\rho_n \geqslant 0.5771\ \ldots$.

Для произвольного n на евклидовой плоскости Чанг и Хванг в [24] получили соотношение $\rho_n \geqslant 0.74309\ \ldots$, а Ду и Хванг в [42] доказали неравенство $\rho_n \geqslant 0.8$. Чанг и Грэхэм [27] улучшили эту оценку до 0.82416.

И наконец в [48] (1990 г.) Ду и Хванг полностью доказали справедливость гипотезы, использовав некоторые идеи из вышеупомянутых работ Рубинштейна и Томаса. При этом они рассматривали проблему нахождения $\min\max g_i(x)$ для конечного семейства выпуклых непрерывных функций $\{g_i(x)\}$, где минимум берется по всем i из некоторого конечного множества, а максимум по всем x из некоторого многогранника. Основной факт, на который опиралось доказательство справедливости гипотезы, состоит в том, что указанный минимакс достигается на конечном числе точек этого многогранника. Техника доказательства содержит ряд оригинальных идей и построений.

Для пространств произвольной размерности d с евклидовой метрикой число ρ_n может быть меньше $\sqrt{3}/2$. Рассмотрение этой задачи проведено в [66], где исследуется отношение $L_{st}(A)/L_{mt}(A)$ в случае, когда терминалы ($n = d - 1$) являются вершинами регулярного симплекса. Высказана гипотеза (недоказанная даже при $d = 2$), что именно на такой конфигурации достигается минимум указанного отношения. Построены минимальные деревья для таких конфигураций, которые, за исключением случаев $d = 3, 4, 5$, не являются ДШ, однако с их помощью получена оценка минимального значения величины $L_{st}(A)/L_{mt}(A)$, предел которой при $d \to \infty$ равен $(1 + \sqrt{3})/4$. В [22] эта оценка была понижена до $(3/2)^{1/2}/(2^{3/2} - 1)$.

Для ЗШ с прямоугольной метрикой Хванг [75] сформулировал аналог гипотезы Джилберта–Поллака, состоящий в том, что $\rho_n = 2/3$. Причем эта граница достижима для бесконечного числа значений n. Кроме того, в этой работе исследованы многие свойства МДШ для ЗШПМ. Такие же исследования проведены и в работах [25], [26], [71].

Три результата, касающиеся значения математического ожидания величины $L_{st}(A)/L_{mt}(A)$ при $n = 3$ в евклидовой метрике, приведены в [84]. В частности показано, что для равномерного распределения $E(L_{st}(A)/L_{mt}(A)) \geqslant 0.98$, а для нормального – $E(L_{st}(A)/L_{mt}(A)) \geqslant 0.96$.

Работы [47] и [140] посвящены обобщению гипотезы Джилберта и Поллака. Во второй из них формулируется некоторая потоковая задача, являющаяся обобщением задачи Штейнера и для нее рассматривается аналог гипотезы. Проводятся сложные построения и рассматривается случай $n = 3$, но в [47] Ду и Хванг приводят контрпример уже при $n = 4$.

Рассмотрим еще несколько задач , исследующих похожие объекты.

Пусть $L_R(A)$ – полупериметр наименьшего прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям, содержащего A. Для случая прямоугольной метрики и $n \geqslant 3$ легко показать, что$L_{st}(A) \geqslant L_R(A)$, поэтому $L_R(A)$ может использоваться в алгоритмах решения ЗШПМ в качестве нижней оценки. Это является обоснованием исследований в [25], [73] величины r_n, равной верхней грани отношения $L_{st}(A)/L_R(A)$ по всем расположениям n терминалов на плоскости. В [73] показано, что $r_3 = 1$, $r_4 = 3$, $r_5 = 3/2$, а в [26] получены значения $r_6 = 5/3$, $r_7 = 7/4$, $r_8 = 11/6$, $r_9 = 2$, $r_{10} = 2$, а кроме того, показано, что при $n \to \infty$ величина r_n, монотонно возрастая, стремится к $(\sqrt{n}+1)/2$.

Чанг и Грэхэм [26] изучают поведение функции $s(n)$, равной наибольшему значению длины МДШ для терминалов внутри единичного квадрата. Для случая евклидовской метрики показано, что $s(n) \geqslant (3/4)^{1/4} n^{1/2} + O(1)$ и $s(n) < 0.995n^{1/2}$ при достаточно больших n, что улучшает оценку $s(n) < n^{1/2} + 7/4$, доказанную в [26]. Для случая же прямоугольной метрики $s(n) < n^{1/2} + 1 + O(1)$ и $s(n) \geqslant n^{1/2} + O(1)$, а $s(r^2) = r + 1$. Высказана также гипотеза, что $s(n) < n^{1/2} + 1$ для всех n.

В [9] исследуется ЗШПМ, терминалы которой равномерно распределены внутри единичного квадрата. Показано, что математическое ожидание минимального числа ТШ в решении задачи растет линейно с ростом n и не меньше, чем $0.039n$. Для ЗШ, а также для ряда других оптимизационных задач найдена асимптотика длины решения, получаемого с вероятностью единица, при этом, например, величины эти для ЗШ и задачи о кратчайшем остове различны (разница составляет 0.029% длины кратчайшего остовного дерева).

Джаин [89] проводит скрупулезный вероятностный анализ эффективности алгоритмов получения нижних оценок в алгоритмах решения ЗШГ на основе лагранжевой релаксации. На двух примерах методов показано что с единичной вероятностью эти алгоритмы дают длину МДШ. Работа содержит также ряд интересных результатов с точки зрения выбора стратегии решения ЗШГ.

Вероятностную постановку ЗШГ и задачи о кратчайшем остове (для каждой

вершины задана вероятность ее появления в графе) исследует Бертсимас в [15]. Получены результаты о соотношении решений этих задач и предложен приближенный (субоптимальный) алгоритм решения ЗШ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agarval P.K., Shing M.-T. Algorithms for the special cases of rectilinear Steiner tress: 1. Points on the boundary of a rectilinear rectangle. – Networks. – 1990. – V. 20.– P. 453–485.
2. Aho A.V., Garey M.R., Hwang F.K. Rectilinear Steiner tress: efficient special case algorithms. – Networks. – 1977. – V. 7. – P. 37–58.
3. Aneja Y.P. An integer linear programming approach to the Steiner problem in graphs. – Networks. – 1980. – V. 10. – P. 167–178.
4. Arnborg S., Proskurowski A. Linear time algorithms for NP-hard problems on graphs embedded in *k*-trees. – Tech. Rep. TRITA–NA–8101, Dept. Numerical Analysis and Comp. Sci., The Royal Inst. of Technology. – Stockholm, 1984.
5. Balakrishnan A., Patel N.R. Problem reduction methods and a tree generation algorithm for the Steiner network problem. – Networks. – 1987. – V. 17. – P. 65–85.
6. Beasley J.E. An algorithm for the Steiner problem in graphs. – Networks. – 1984. – V. 14. – P. 147–159.
7. Beasley J.E. An SST-based algorithm for the Steiner problem in graphs. – Networks. – 1989. – V. 19. – P. 1–16.
8. Bern M.W., de Carvalho M. A greedy heuristic for the rectilinear Steiner tree problem. – Tech. Rep., Comp. Sci. Div., Univ. Calif. Bercley, 1985.
9. Bern M.W. Two probabilistic results on rectilinear Steiner trees. – Proc. 18-th STOC. – 1986. – P. 433–441.
10. Bern M.W. A more general special case of the Steiner tree problem. – Tech. Rep., Comp. Sci. Div., Univ. Calif. – Berkeley, 1986.
11. Bern M.W., Graham R.L. The shortest network problem. – Scientific America. – 1989. – P. 66–71.
12. Bern M.W., Plassman P. The Steiner problem with edge length 1 and 2 // Inf. Proc. Letters. – 1989. – V. 32, № 4. – P. 171–176.
13. Bern M.W. Faster exact algorithms for Steiner trees in planar networks. – Networks. – 1990. – V. 20.– P. 109–120.
14. Bertsimas D.G. The probabilistic minimum spanning tree problem. – Networks. – 1990. – V. 20. – P. 245–275.
15. Boruvka O. O jistem problemu minimalnim // Acta Societ. Scient. Natur. Moravicae. – 1926. – V. 3. – P. 37–58.
16. Boyce W.M. An improved program for the full Steiner tree problem // ACM Trans. on Math. Software. – 1977. – V. 3. – P. 359–385.
17. Boyce W.M., Seery J.B. STEINER 72: An improved version of the minimal network problem. – Rech. Rep., 35, Comp. Sci. Res. Ctr. Bell Lab., Murray Hill, N.-Y., (undated).
18. Бурдюк В.Я., Новикова Н.Г. О задаче Штейнера на конечных множествах // Математические заметки. – 1980. – Т. 28, № 4. – С. 583–588.
19. Campbell B.A., Rardin R.L. Polynomial time solution of Steiner tree problems on special planar graphs. – Research Memorandum № 86–7, School Ind. Eng., Purdue Univ., 1986.
20. Chang S. The generation of minimal trees with a Steiner topology // J. ACM. – 1972. – V. 19. – P. 669–711.
21. Chen N.P. New algorithms for Steiner trees on graphs. – Int. Symp. Circuits and System Proc. – May 1983. – P. 1217–1219.
22. Chung F.R.K., Gilbert E.N. Steiner trees for the regular simplex // Bull. Inst. Math. Sinica. – 1976. – V. 4. – P. 313–325.
23. Chung F.R.K., Graham R.L. Steiner trees for ladders // Ann. Discr. Math. – 1978. – V. 2. – P. 172–200.
24. Chung F.K.K., Hwang F.K. A lower bound for the Steiner tree problem // SIAM J. Appl. Math. – 1978. – V. 34. – P. 27–36.
25. Chung F.R.K., Hwang F.K. The largest minimal rectilinear Steiner trees for the set of *n* points enclosed in the rectangle with given perimeter. – Networks. – 1979. – V. 9. – P. 19–36.
26. Chung F.R.K., Graham R.L. On Steiner trees for bounded point sets. – Geometrie Dedicata. – 1981. – V. 11. – P. 353–361.

27. Chung F.R.K., Graham L.R. A new bound for the euclidean Steiner minimal trees // Annals N.-Y. Acad. Sci. – 1985. – V. 440. – P. 328–346.
28. Clause A., Maculan N. Um nouvelle formulation de probleme de Steiner sur un graphe. – Publ. 280. Centre de Recherche sur les Transports, Univ. de Montreal, 1983.
29. Cockayne E.J. On the Steiner problem // Canad. Math. Bull. – 1967. –V. 10. – P. 431–450.
30. Cockayne E.J., Melzak Z.A. Steiner's problem for set terminals // Quart. Appl. Math. – 1968. – V. 26. – P. 213–218.
31. Cockayne E.J. Computation of minimal length full Steiner trees on the vertices of a convex polygon // Math. Comput. – 1969. – V. 23. – P. 521–531.
32. Cockayne E.J. On the efficiency of the algorithm for Steiner minimal trees // SIAM J. Appl. Math. – 1970. – V. 18. – P. 150–159.
33. Cockayne E.J., Schiller D.G. Computation of Steiner minimal trees. – In: Combinatorics. (Ed. D.J.A. Welsh, D.R. Woddall)., Inst. of Math. and its Appl. – Essex, England, 1972. – P. 52–71.
34. Cockayne E.J., Hewgill E.E. Exact computation on Steiner minimal trees in the plane // Inf. Proc. Letters. – 1989. – V. 22. – P. 151–156.
35. Cohoon J.P., Rachards D.S., Salowe J.S. A linear–time Steiner tree routing algorithm for terminals on the boundary of a rectangle. – IEEE Int. Conf. Comp. Aided Design, Calif., Santa-Clara. – Washington, 1988. – P. 402–405.
36. Courant R., Robbins H. What is mathematics? – London: Oxford Univ. Press, 1941.
37. D'Atri A., Moscarini M., Sassano A. The Steiner tree problem and homogeneous sets / Eds. Chytil M.P., Janiga L., Koubek V. – Mathematical foundation on computer science 1988 // Lecture Notes in Computer Science. – Berlin: Springer, 1988. – V.324. – P. 249–261.
38. D'Atri A., Moscarini M. Distance–hereditary graphs, Steiner trees and connected domination // SIAM J.of Comput. – 1988. – V. 17. – P. 521–538.
39. Dijkstra E.W. A note on two problems in connection with graphs // Numer. Math. – 1959. – V. 1. – P. 269–271.
40. Dionne R., Florian M. Exact and approximate algorithms for optimal network design. – Networks. – 1979. – V. 9. – P. 37–59.
41. Dreyfus S.E., Wagner R.A. The Steiner problem in graphs. – Networks. – 1972. – V. 1. – P. 195–207.
42. Du D.Z., Hwang F.K. A new bound for the Steiner ratio // Trans Amer. Math. Soc. – 1983. – V. 278. – P. 137–148.
43. Du D.Z., Hwang F.K., Weng J.F. Steiner minimal trees on zig-zag lines // Trans Amer. Math. Soc. – 1983. – V. 278. – P. 149–156.
44. Du D.Z., Yao E.Y., Hwang F.K. A short proof of a result of Pollak on Steiner minimal trees // J. Comb. Theory. Ser. A. – 1982. – V. 32. – P. 396–400.
45. Du D.Z., Hwang F.K., Chao S.C. Steiner minimal tree for points on a circle // Proc. Amer. Math. Soc. – 1985. – V. 95. – P. 613–618.
46. Du D.Z., Hwang F.K., Yao E.Y. The Steiner ratio conjecture is true for five points // J. Comb. Theory. Ser. A. – 1985. – V.38. – P. 230–240.
47. Du D.Z., Hwang F.K. On a conjecture of Trietsch and Handler on the fl, 1986. – P. 47–50.
48. Du D.Z., Hwang F.K. An approach for proving lower bounds: Solution of Gilbert–Pollak's conjecture on Steiner ratio // Proc. 31-st Annual Symp. on Found. of Comput. Sci., 1990. – P. 76–85.
49. Duin C.W., Volgenant A. Some generalization of the Steiner problem in graphs. – Networks. – 1987. – V. 17. – P. 353–364.
50. Duin C.W., Volgenant A. Reduction tests for the Steiner problem in graphs. – Networks. – 1989. – V. 19. – P. 549–567.
51. Duin C.W., Volgenant A. An edge elimination test for the Steiner problem on graphs // Operations Research letters. – 1989. – V. 8. – P. 79–83.
52. El-Arbi C. Une heuristique pour le probleme de l'arbre de Steiner // RAIRO Operations Research. – 1978. – V. 12. – P. 207–212.
53. Ericson R.E., Monma E.L., Veinott A.F. Send-and-split method for minimum concave cost network flows // Math. Oper. Res. – 1987. – V. 12. – P. 634–664.
54. Farley A.M., Hedetniemi S.T., Mitchell S.L. – Rectilinear Steiner trees in rectangle trees // SIAM J. Alg. Discr. Math. – 1980. – V. 1. – P. 70–81.

55. de Fermat P. Maxima et minima, 1638. – In: P. Tannery, C. Henry, Oeuvres de Fermat. – Paris, Gauthier-Villars. – 1891. – V. 1. – P. 133–174.
56. Floyd R.W. Algorithm 97: Shortest path // Comm. ACM. – 1962. – V. 5. – P. 345.
57. Foulds L.R., Gibbons P.B. A branch and bound approach to the Steiner problem in graphs // Proc. 14-th Annual Conf. Oper. Res. Soc. New Zealand, Univ. Canterburg, Christchurch. – 1978. – V. 1. – P. 61–70.
58. Foulds L.R., Gibbons P.B., Shore M.L. Algorithms for the Steiner problem in graphs // J. Comb. Inf. Syst. Sci. – 1981. – V. 6. – P. 215–219.
59. Foulds L.R., Graham R.L. The Steiner problem in phylogeny is NP-complete // Adv. Appl. Math. – 1982. – V. 3.– P. 43–49.
60. Foulds L.R., Rayward-Smith V.J. Steiner problems in graphs: Algorithms and applications // Eng. Opt. – 1983. – V. 7. – P. 7–16.
61. Foulds L.R., Rayward-Smith V.J. Steiner problems in graphs: Algorithms and applications. – Tech. Rep. CSA 2, School Comp. Stud. and Accountancy / Univ. East England. – England, 1983.
62. Fu Y. Application of linear graph theory to printed circuits // Proc. Asilomar Conf. on Systems and Circuits. – 1967. – P. 721–728.
63. Garey M.R., Johnson D.S. The rectilinear Steiner tree problem in NP-complete // SIAM J. Appl. Math. – 1977. – V. 32. – P. 826–834.
64. Garey M.R., Graham R.L., Johnson D.S. The complexity of computing Steiner minimal trees // SIAM J. Appl. Math. – 1977. – V. 32. – P. 835–859.
65. Georgakopoulos G., Papadimitriou C.H. The 1-Steiner tree problem // J. Alg. – 1987. – V. 8. – P. 122–130.
66. Gilbert E.N., Pollak H.O. Steiner minimal trees // SIAM J. Appl. Math. – 1968. – V. 16. – P. 1–29.
67. Graham R.L., Hell P. On the history of the minimum spanning tree problem // Annals history Comput. – 1985. – V. 7. – P. 43–57.
68. Graham R.L., Hwang F.K. Remarks of Steiner minimal trees // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. – 1976. – V. 4. – P. 177–182.
69. Hakimi S.L. Steiner's problem in graphs and its implications. – Networks. – 1971. – V. 1. – P. 113–133.
70. Hanan M. Net wiring for large scale integrated circuits / IMB Res. Rep., 1965.
71. Hanan M. On Steiner's problem with rectilinear distance // SIAM J. Appl. Math. – 1966. – V. 14. – P. 255–265.
72. Hanan M. A counterexample to a theorem of Fu on Steiner's problem // IEEE Trans. Circuit Theory. – 1972. – V. CI–19. – P. 74.
73. Hanan M., Kurtzburg J.M. Placement techniques. – Design automation of digital systems / Ed. M. Breuer, Prentice Hall, Englewood Cliffs. – N.-Y., 1972.
74. Hanan M. Layout, interconnection and placement. – Network. – 1975. – V. 5. – P. 85–88.
75. Hwang F.K. On Steiner minimal trees with rectilinear distance // SIAM J. Appl. Math. – 1976. – V. 30. – P. 104–114.
76. Hwang F.K. The rectilinear Steiner problem // J. Design Automation and Foult Tolerant Comput. – 1978. – V. 2. – P. 303–310.
77. Hwang F.K. An $O(n \log n)$ algorithm for suboptimal rectilinear Steiner trees IEEE Trans. Circuits and Systems. – 1979. – V. CAS – 26. – P. 75–77.
78. Hwang F.K. An $O(n \log n)$ algorithm for rectilinear minimal spanning trees // Journal of ACM. – 1979. – V. 26. – P. 177–182.
79. Hwang F.K. A linear time algorithm for full Steiner trees // Oper. Res. Letters. – 1986. – V. 4. – P. 235–237.
80. Hwang F.K., Weng J.F. Hexagonal coordinate systems and Steiner minimal trees // Discr. Math. – 1986. – V. 62. – P. 49–57.
81. Hwang F.K., Song G.D., Ting C.Y., Du D.Z. A decomposition theorem on euclidean Steiner minimal trees // Discr. Comput. Geometry. – 1988. – V. 3. – P. 367–382.
82. Iwainsky A., Canuto E., Taraszow O., Villa A. Network decomposition for the optimization of connection structures. – Networks. – 1986. – V. 16. – P. 205–235.
83. Iwainsky A. Some notes on the Steiner tree problem in graphs / In: A. Iwainsky (ed); Optimization on connection structures in graphs / Central Inst. of Cyber. and Inform. Processes. – Berlin/DDR, 1985. – P. 57–73.

84. Jain A. Probabilistic analysis of an LP relaxation bound for the Steiner problem in networks. – Networks. – 1989. – V. 19. – P. 793–801.
85. Jarnik V., Kossler M. O minimalnich gralcch, obsahujicich *n* danych bodu. – Casopis pro Pestovani Matemetiky a Fisiky. – 1934.– P. 223–235.
86. Kallman R. On a conjecture of Gilbert and Pollak on minimal spanning trees // Studies in Appl. Math. – 1973. – V. 52. – P. 141–151.
87. Karp R.M. Reducibility among combinatorial problems / In: R.E. Miller, J.W. Thatcher; Complexity of Computer Computation, Plenum. – N.-Y., 1972. – P. 85–103.
88. Кельманс А.К. Построение минимального покрывающего дерева. – В сб.: Кибернетика и управление. – М.: Наука, 1967. – С. 115–130.
89. Komlos J., Shing M.T. Probabilistic partitioning algorithms for he rectilinear Steiner problem. – Networks. – 1985. – V. 15. – P. 413–423.
90. Korhonen P. An algorithm for transforming a spanning tree into a Steiner tree // Proc. 9-th Int. Progr. Symp., Budapest 1976. – North Holland, Amsterdam, 1979. – P. 343–357.
91. Korte B., Moring R.H. Zur bedeutung der diskreten Mathematik fur die Konstruktion hochintegrierter Schaltkreise / In: R. Henn (ed.), Technologie, Wachstum und Beschaftigung – Festschrift fur Lotar Spath. – Berlin – Heidelberg: Springer. – 1987. – P. 582–596.
92. Korte B., Promel H.-J., Steger A. Steiner trees in VLSI-layout / Rep. 89566–OR, Inst fur Okon. und Op. Res. Rheinische, Fr. – Wil. – Univ. – Bonn, 1989.
93. Kou L., Markowsky G., Berman L. A fast algorithm for Steiner trees // Acta Informatica. – 1981. – V. 15. – P. 141–145.
94. Kou L.T., Makki K. An even faster approximation algorithm for the Steiner tree problem in graphs // Congr. Numerantium. – 1987. – V. 59. – P. 147–154.
95. Krarup J., de Werra D. The generalyzed Steiner problem and solvable cases of TSP // Paper presented to the EURO VII. – Bologna, 1985.
96. Kruckal J.B. On the shortest spanning subtree of a graph and the salesman travelling problem // Proc. Amer. Math. Soc. – 1956.– V. 7. – P. 48–50.
97. Kucera L., Marshetti-Spaccamela A., Protaci M., Talamo M. Near optimal algorithms for finding minimum Stainer trees in random graphs // Lecture Notes in Comput. Sci. – Berlin: Springer, 1986. – P. 501–511.
98. Kuhn H.W. Steiner's problem revisited // Studies in Mathematics. – 1975. – V. 10. – P. 52–70.
99. Lawler E. Combinatorial optimization: Networks and matroids, Hold–Renehart–Winston. – N.-Y., 1976.
100. Lee D. Some industrial case studies of Steiner trees / Paper presented to the NATO Advances Research Workshop on Topological Network Design. – Kopenhagen, 1989.
101. Lee J.h., Bose N.K., Hwang F.K. Use of the Steiner's problem in suboptimal routing in rectilinear metric // IEEE Trans. on Circuits and Systems.– 1976. – V. CAS–23. – P. 470–476.
102. Левин А.Ю. Алгоритм кратчайшего соединения группы вершин графа // Доклады АН СССР. – 1971. – Т. 200, № 4. – С. 773–776.
103. Liu W. A lower bound for the Steiner tree problem in directed graph. – Networks. – 1990. – V. 20. – P. 765–778.
104. Лотарев Д.Т. Задача Штейнера для транспортной сети на поверхности, заданной цифровой моделью // Автоматика и телемеханика. – 1980. –Т. 10. – С. 104–115.
105 Maculan N. The Steiner problem in graphs. Surveys in Combinatorial Optimization, Lect. Rio de Janeiro, Braz. 1985 // Ann. Discr. Math. – 1987. – V. 31.– P. 185–211.
106. Matos R.L. Rectilinear Arborescence and Rectilinear Steiner Tree Problem. – Ph. D. Dis., Fac. Sci. and Eng., Univ. Birmingham, 1980.
107. Mehlhorn K. A faster approximation algorithm for the Stainer problem in graphs // Inf. Proc. Letters. – 1988. – V. 27. – P. 125–128.
108. Melzak Z.A. On the problem of Steiner. – Canad. Math. Bull. – 1961. – V. 4. – P. 143–148.
109. Muller H., Brandstadt A. The NP-completeness of Steiner tree and dominating set for chordal bipartite graphs // Theor. Comp. Sci. – 1987. – V. 53. – P. 257–265.
110. Nastansky L., Selkow S.M., Stewart N.F. Cost-minimal trees in directed acyclic graphs // Z. Oper. Res. – 1974. – V. 18. – P. 59–67.
111. Pffaf J., Laskar R., Hedetniemy S.T. NP-completeness of total and connected domination and irredundance for bipartite graphs. – Technical Rep., 428, Clemson Univ., 1983.

112. Plesnik J. A bound for the Steiner tree problem in graphs Math. Slovaca. – 1981. – V. 31. – P. 155–163.
113. Pollak H.O. Some remarks on the Steiner problem. – Combin. Theory. – 1978. – V. A–24. – P. 278–295.
114. Prim R.C. Shortest connection networks and some generalizations // Bell System Tech. J. – 1957. – V. 36. – P. 1389–1401.
115. Prodon A., Liebling T.M., Groeflin H. Steiner's problem on two-trees. – Tech. Rep. RO 850315, Dept. de Math. Ecole Polytechnique Federale de Lausanne. – Suisse, 1985.
116. Provan J.S. Convexity and the Steiner tree problem. – Networks. – 1988. – V. 18. – P. 55–72.
117. Provan J.S. An approximation scheme for finding Steiner trees with obstacles // SIAM J. Comput. – 1988. – V. 17. – P. 920–934.
118. Raywarb-Smith V.J. The computation of nearly minimal Steiner trees in graphs // Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. – 1983. – V. 14. – P. 15–23.
119. Raywarb-Smith V.J., Clare A. On finding Steiner vertices. – Networks. – 1986. – V. 16. – P. 283–294.
120. Richards D. Fast heuristic algorithms for rectilinear Steiner trees // Algorithmica. – 1989. – V. 4. – P. 191–207.
121. Richey M.B., Parker R.G., Rardin R.L. An efficiently solvable case of the minimum weight equivalent subgraph problem. – Networks. – 1985. – V. 15. – P. 217–228.
122. Richey M.B., Parker R.G. On multiple Steiner subgraph problem. – Networks. – 1986. – V. 16. – P. 423–438.
123. Sankoff D., Rousseau P. Locating the vertices of a Steiner tree in an arbitrary metric space // Mathematical Programming. – 1975. – V. 9. – P. 240–246.
124. Schiemangk C. Thermodynamically motivated simulation for solving the Steiner tree problem and the optimization of interacting path systems / A. Iwainsky (ed.); Optimization on connection structures in graphs, Central Inst. of Cyber. and Inform. Processes. – Berlin/DDR, 1985. – P. 91–120.
125. Segev A. The node-weighted Steiner tree problem. – Networks. – 1987. – V. 17. – P. 1–17.
126. Servit M. Heuristic algorithms for rectilinear Steiner trees // Digital Processes. – 1981. – V. 7. – P. 21–32.
127. Shaohan M. The Steiner tree problem on graph and its heuristic algorithm // Chin. J. Comput. – 1985. – V. 8. – P. 237–239.
128. Shore M.L., Foulds L.R., Gibbons P.B. An algorithm for the Steiner. – P. 323–333.
129. Smith J.M., Liebman J.S. Steiner trees. Steiner circuits and the interference problem in building design // Eng. Opt. – 1979. – V. 4. – P. 15–36.
130. Smith J.M., Lee D.T., Liebman J.S. An $O(n \log n)$ heuristic algorithm for the rectilinear Steiner minimal tree problem // Eng. Opt. – 1980. – V. 4. – P. 179–192.
131. Smith J.M., Liebman J.S. An $O(n)$ heuristic algorithm for the directed Steiner minimal tree problem // Appl. Math. Modelling. – 1980. – V. 4. – P. 369–375.
132. Smith J.M., Lee D.T., Liebman J.S. An $O(n \log n)$ heuristic algorithm for the Steiner minimal tree problems on the euclidean metric. – Networks. – 1981. – V. 11. – P. 23–39.
133. Солтан П.С., Присакару К.Ф. Задача Штейнера на графах // Доклады АН СССР. – 1971. – Т. 198, № 1. – С. 46–49.
134. Солтан П.С. Совместное решение нескольких задач Штейнера на графе // Доклады АН СССР. – 1972. – Т. 202, № 4. – С. 773–776.
135. Steiner J. Aufgaben und Lehrsatze, erstere aufzulosen, letztere zu beweisen // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. – 1835. – V. 13. – P. 361–364.
136. Sullivan G.F. Approximation algorithm for Steiner tree problems. – New Haven, 1982.
137. Suurbale J.W. Algorithms for minimal trees and semi-Steiner trees based on the simplex method / H.W. Kuhn (ed.), Proc. Princeton Symp. on Math. Programming, Princeton Univ. Press. – Princeton, 1970. – P. 614–615.
138. Takahashi H., Matsuyama A. An approximate solution for the Steiner problem in graphs // Math. Japonica. – 1980. – V. 24. – P. 573–577.
139. Torricelli E. De maximis et minimis, 1646. In: G. Loria, G. Vassura, Opere de Evangelista Torriceli, V. 1, Geometria, pt. 2. – P. 79–97.
140. Trietsch D., Handler G.Y. The Gilbert and Pollak conjecture: A generalization. – Networks. – 1985. – V. 15. – P. 365–380.

141. Трубин В.А. Об одном подклассе задач Штейнера на плоскости с прямоугольной метрикой // Кибернетика. – 1985. – № 3. – С. 37–40.
142. Triersch D. Augmenting euclidean networks: The Steiner case // SIAM J. Appl. Math. – 1985. – V. 45. – P. 855–860.
143. Trietsch D. Interconnecting networks in the plane: The Steiner case. – Networks. – 1990. – V. 20. – P. 93–108.
144. Valiant L.G. The complexity of enumeration and reliability problem // SIAM J. Comput. – 1979. – V. 8. – P. 410–421.
145. Voss S., Mehr K.D. On a generalized Steiner problem with 2-edge-connectivity // Methods Oper. Res. – 1987. – V. 57. – P. 161–172.
146. Voss S. Steiner – Probleme in Graphen. (Mathematical systems in economisc, v. 120), Anton Hain, Frankfurt am Main, 1990.
147. Wald J.A., Colbourn C.J. Steiner trees in outerplanar graphs // Congr. Numerantium. – 1982. – V. 36. – P. 15–22.
148. Wald J.A., Colbourn C.J. Steiner trees, partial 2-trees, and minimum IFI networks. – Networks. – 1983. – V. 13. – P. 159–167.
149. Wald J.A., Colbourn C.J. Steiner trees in probabilistic networks. – Microelectronics and Reliability. – 1983. – V. 23. – P. 837–840.
150. Wald J.A., Sorensen P.G. Resolving the query inference problem using Steiner trees // ACM Trans. Database Systems. – 1984. –V. 9. – P. 348–368.
151. Wang S.M. A multiple source algorithm for suboptimum Steiner trees in graphs. – In: H. Noltemeier (ed.), Proc. Int. Workshop on Graphtneoretic Concepts in Computer Science. – Wirzburg: Trauner–Verlag, 1985.–P. 387–396.
152. Waxman B.M., Imase M. Worst case performance of Rayward-Smith's Steiner tree heuristic // Inf. Proc. Letters. – 1988. – V. 29. – P. 283–287.
153. Weng J.F. Generalized Steiner problem and hexagonal coordinate system. – Acta Math. Appl. Sinica, 1985.– P. 383–397.
154. White K. Steiner trees and strongly chordal graphs. – M. Math. Thesis, Univ. of Waterloo, 1983.
155. White K., Farber M., Pulleyblank W. Steiner trees, connected domination and strongly chordal graphs. – Networks. – 1985. – P. 109–124.
156. Widmayer P. An approximation algorithms for Steiner's problem in graphs // Lecture Notes in Comput. Sci. – 1987. – V. 246. – P. 17–28.
157. Winter P. An algorithm for the Steiner problem in the euclidean plane. – Networks. – 1985. – V. 15. – P. 323–345.
158. Winter P. Generalized Steiner problem in outerplanar networks // BIT. – 1985. – V. 25. – P. 485–496.
159. Winter P. Generalized Steiner problem in series–parallel networks // Journal of Algorithms. – 1986. – V. 7. – P. 549–566.
160. Winter P. Steiner problem in Halin graphs // Discr. Appl. Math. – 1987. – V. 17. – P. 281–294.
161. Winter P. Steiner problem in networks: A survey. – Networks. – 1987. – V. 17. – P. 129–167.
162. Winter P., Smith Y.M. Path-distance heuristics for the Steiner Ploblem in undirected networks // Algorithmica (In appear).
163. Wong R.T. The dual ascent approach for Steiner tree problems on a directed graph // Math. Progr. – 1984. – V. 28. – P. 271–287.
164. Wu Y.F., Widmayer P., Wong C.K. A faster approximation algorithm for the Steiner problem in graphs // Acta Informatica. – 1986. –V. 23. – P. 223–229.
165. Yang Y.Y., Wing O. An algorithm for the wiring problem // Digest of IEEE Int. Symp. on Electrical Networks. – London, 1971. – P. 14–15.
166. Yang Y.Y., Wing O. Optimal and suboptimal solution algorithms for the wiring problem // Proc. IEEE Int. Symp. Circuit Theory. – 1972. – P. 154–158.
167. Yang Y.Y., Wing O. Suboptimal algorithm for a wire routing problem // IEEE Trans. Circuit. Theory. – 1972. – V. CT–19. – P. 508–511.
168. Ying C.S., Wong J.S.L., Hong X.L., Wang E.Q. Covering search algorithm for the Steiner tree on global routing graphs (to appear).
169. Dolan J., Weiss R., Smith J.M. Minimal length tree networks on the unit sphere // Annals Operations Research. – 1991. – V. 33. – P. 503–535.

170. Duin C., Volgenant T. The multi-weight Steiner tree problem // Annals Operations Research. – 1991. – V. 33. – P. 451–469.
171. Hwang F.K. A primer of the euclidean Steiner problem // Annals of Operations Research. – 1991. – V. 33. – P. 73–84.
172. Maculan N., Souza P., Candia Vejar A. An approach for the steiner problem in directed graphs // Annals Operations Research. – 1991. – V. 33. – P. 471–480.
173. Provan J.S. The role of Steiner hulls in the solution to Steiner tree problems // Annals Operations Research. – 1991. – V. 33. – P. 537–548.
174. Richards D.S., Salowe J.S. A simple proof of Hwang's theorem for rectilinear Steiner minimal trees // Annals Operations Research. – 1991. – V. 33. – P. 549–556.
175. Rubinstein J.H., Thomas D.A. A variational approach to the Steiner network problem // Annals Operations Research. – 1991. – V. 33. – P. 481–499.
176. Rubinstein J.H., Thomas D.A. The Steiner ratio conjecture for six points // J. Comb. Theory. Ser. A. (to appear).
177. Winter P., Smith J.M. Steiner minimal trees for three points with one convex polygonal obstacle // Annals Operations Research. – 1991. – V. 33. – P. 577–599.

Статья поступила 19.03.92